

Título: Localizando astros na abóbada celeste por meio da Constelação de Órion**Arilson Monteiro dos Santos**

Centro Universitário Faculdades Metropolitanas Unidas (FMU), São Paulo, SP, Brasil

Leandro Albino Mosca Rodrigues

Instituto Federal de São Paulo-Campus:Cubatão (IFSP-CBT), Cubatão, SP, Brasil

Resumo: Este artigo propõe um método para estipular aproximadamente a posição de astros celestes utilizando a Geometria Esférica, com ênfase na constelação de Órion como marco de referência. Partindo de resultados clássicos dessa geometria, descrevemos o movimento aparente do Sol e apresentamos os três sistemas de coordenadas astronômicas (horizontal, equatorial e eclíptica), fundamentais para a orientação celeste. Definimos o triângulo de posição e os ângulos essenciais para o cálculo das coordenadas de um objeto astronômico. Como aplicação prática, dadas ascensão reta e declinação, os parâmetros, representamos as posições das estrelas Betelgeuse e Rigel na abóbada celeste. Adicionalmente, geramos um diagrama que exhibe a configuração orbital dos planetas do Sistema Solar em 11 de julho de 2020, demonstrando como a proximidade de alguns planetas, nessa data, com o cinturão de Órion, poderia ter auxiliado na localização planetária, com ou sem instrumentos ópticos.

Palavras-chave: Geometria Esférica. Coordenadas Astronômicas. Constelação de Órion. Astronomia de Posição. Navegação Celeste.

Abstract: *This paper proposes a method to approximate the positions of celestial objects using Spherical Geometry, with emphasis on the Orion constellation as a reference framework. Building on classical results from this geometry, we describe the Sun's apparent motion and introduce the three astronomical coordinate systems (horizontal, equatorial, and ecliptic), which are fundamental for celestial orientation. We define the position triangle and the key angles required to calculate an astronomical object's coordinates. As a practical application, given right ascension and declination parameters, we map the positions of the stars Betelgeuse and Rigel on the celestial sphere. Additionally, we generate a diagram displaying the orbital*

configuration of the Solar System's planets on July 11, 2020, demonstrating how the proximity of certain planets to Orion's Belt on that date could have aided in their localization, with or without optical instruments.

Keywords: *Spherical Geometry. Astronomical Coordinates. Orion's Constellation. Positional Astronomy. Celestial Navigation.*

INTRODUÇÃO

O funcionamento do GPS, a navegação, a aviação e a localização de astros no céu são algumas das aplicações cotidianas da Geometria Esférica. Toledo (2018) comenta que o matemático português Pedro Nunes (1502-1578) já havia utilizado as noções de Geometria Esférica para buscar responder a um problema de navegação da época. Assim, notamos as diversas aplicações imediatas dessa abordagem para a geometria.

Mas, embora seja um assunto que ganhou destaque no século XIX, conforme Santos e Pansonato (2022), o artigo de Gregor et. al. (2021) explicita uma lacuna de conhecimento dos professores em relação ao tema e, conseqüentemente, do público em geral.

Dessa maneira, este artigo tem a intenção de mostrar uma possibilidade para explorar conceitos preliminares da Geometria Esférica no contexto da Astronomia de Posição, fazendo uso das coordenadas astronômicas da constelação de Órion e dos planetas do sistema solar.

Nossa escolha é justificada pelo argumento de Ferreira e Leite (2015, p. 125), de que as pesquisas em Astronomia indicam a observação do céu como sendo uma importante atividade para o conhecimento astronômico. Então, usamos a Astronomia de Posição como um contexto apropriado.

Para isso, utilizamos algumas metodologias de pesquisa. Seguindo Marconi e Lakatos (2003), aplicamos a pesquisa bibliográfica, consultando livros, dissertações e artigos para construir o referencial teórico; a pesquisa documental ao extrair dados das coordenadas astronômicas no aplicativo *The Sky Live*¹ e também a pesquisa de

¹ O *The Sky Live* é uma ferramenta voltada para a observação de corpos celestes e eventos astronômicos, como constelações, estrelas, supernovas, cometas, eclipses. Seu acesso pode ser feito por <https://theskylive.com> ou <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.theskylive.androidapp>.

caráter tecnológica-experimental para elaborar as imagens que simulam a posição dos astros na abóbada celeste, via *Geogebra 3D*.

A abordagem metodológica é qualitativa, pois realizamos análise conceitual e visual baseada em fontes teóricas e dados astronômicos. Ademais, a pesquisa é de cunho exploratório e explicativo, uma vez que visa aprofundar o conhecimento sobre conceitos astronômicos fundamentais e busca mostrar como encontrar os astros na abóbada celeste. E, quanto à natureza, é uma pesquisa aplicada.

Em síntese, o artigo tem início com uma apresentação da Geometria Esférica, em que apresentamos os triângulos esféricos e alguns teoremas importantes. Então, citamos os conceitos fundamentais da Astronomia de Posição, como os sistemas de coordenadas, o triângulo de posição e o cálculo da separação angular.

Logo em seguida, destacamos a constelação de Órion, na qual sublinhamos a localização das estrelas do aglomerado e suas respectivas coordenadas equatoriais, obtidas no aplicativo *The Sky Live*.

Finalizando, ilustramos a localização de duas estrelas do cinturão de Órion na esfera celeste e plotamos a posição dos planetas do sistema solar nesta esfera, de modo a utilizar a constelação de Órion como um referencial para visualizações à noite.

GEOMETRIA ESFÉRICA

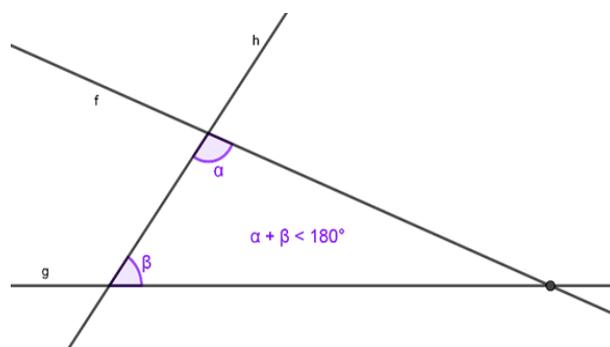
O estudo da Geometria Euclidiana ocorre sobre o plano e está fundamentado nos cinco postulados enunciados por Euclides de Alexandria (por volta de 325 a.C. - 265 a.C.):

1 – Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto. 2 – Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta. 3 – E, com todo centro e distância, descrever um círculo. 4 – E serem iguais entre si todos os ângulos retos. 5 – E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos. Bicudo (2009, p. 97).

Enquanto os primeiros postulados são concisos e diretos, o último postulado é extenso e deixa a impressão que se trata de uma proposição. De fato, interpretações alternativas ou equivalentes desse postulado foram dadas, como: por um ponto fora de uma reta podemos traçar uma única reta paralela a esta reta dada ou a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a dois ângulos retos, dentre outros,

como explica Barbosa (1994). Uma interpretação geométrica do quinto postulado é exibida na Figura 1.

Figura 1 – O quinto postulado de Euclides.



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

Apesar da obra de Euclides ser uma referência fundamental em Matemática, o plano apresenta limitações que impossibilitam o desenvolvimento de situações que não dependam de um sistema referencial de coordenadas cartesianas ortogonais.

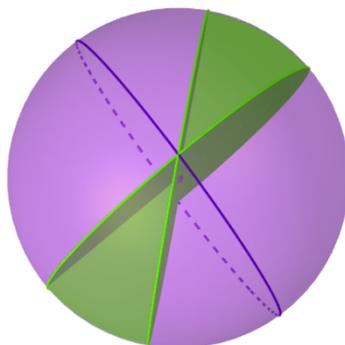
Ao longo dos séculos, matemáticos tentaram desenvolver novas geometrias, mas sempre esbarravam no quinto postulado. Segundo Abreu (2015), seus esforços eram impedidos pelo postulado. Posteriormente, percebeu-se que, ao desconsiderá-lo, era possível fundamentar as geometrias não euclidianas, como a hiperbólica, a elíptica e a esférica, desenvolvidas por Lobachevsky, Bolyai e Gauss.

Então, neste artigo, voltamos nossa atenção à Geometria Esférica, na qual o estudo das formas e posições dos objetos se dá sobre a superfície de uma esfera de raio arbitrário, sendo ângulo, arco e circunferência os conceitos elementares. Neste modelo é falso que:

- Dois pontos determinam uma única reta;
- Dados três pontos de uma reta, um deles sempre está entre os outros dois;
- A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Nesse contexto, definimos a *circunferência máxima* como a interseção entre uma superfície esférica e um plano que passa pelo seu centro. Conseqüentemente, temos o fuso completo, ilustrado pela Figura 2, que se trata da região compreendida entre duas circunferências máximas.

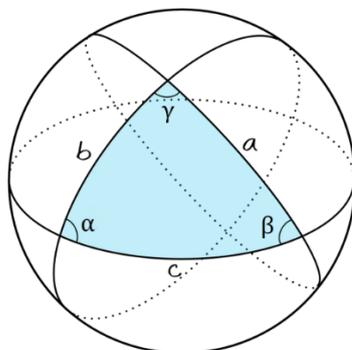
Figura 2 – Fuso esférico completo.



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

Mas a noção mais importante, que norteia o texto, são os triângulos esféricos. O triângulo esférico é um triângulo formado por três pontos arbitrários da superfície esférica, não pertencentes a uma mesma circunferência máxima e, além disso, cujos vértices estão interligados pelas circunferências máximas que se interceptam duas a duas, conforme exemplificado na Figura 3.

Figura 3 – Triângulo esférico.



Fonte: Kepler e Saraiva (2014).

As medidas do triângulo esférico são dadas em ângulos, uma vez que cada lado é um arco.

Assim como na Geometria Euclidiana Plana, podemos deduzir relações entre os lados e os ângulos. A seguir, apresentamos teoremas que serão importantes para alcançar resultados posteriores, as devidas demonstrações podem ser consultadas em Abreu (2015).

- **Teorema dos Cossenos:** Seja ΔABC um triângulo esférico de lados a, b, c , e ângulos internos α, β, γ medidos em radianos, então,

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \text{sen}(b)\text{sen}(c)\cos(\alpha)$$

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \text{sen}(a)\text{sen}(c)\cos(\beta)$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(\gamma)$$

- **Teorema dos Senos:** Seja ΔABC um triângulo esférico de lados a, b, c , e ângulos internos α, β, γ medidos em radianos, então,

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\gamma)}$$

Ambos os teoremas são práticos para encontrar relações entre os ângulos de um triângulo esférico especial, chamado triângulo de posição, que possui aplicações na Astronomia.

MOVIMENTO APARENTE CELESTE

A *esfera celeste* é uma abstração que representa uma esfera imaginária de raio arbitrário, em que a sua superfície intercepta qualquer astro, sendo concêntrica à Terra. Ela “gira” em torno de um eixo coincidente com o eixo de rotação da Terra, mas como um prolongamento deste (KEPLER; SARAIVA, 2014). Tal eixo intercepta a esfera celeste em dois pontos fixos, os *pólos celestes*, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Esfera celeste.



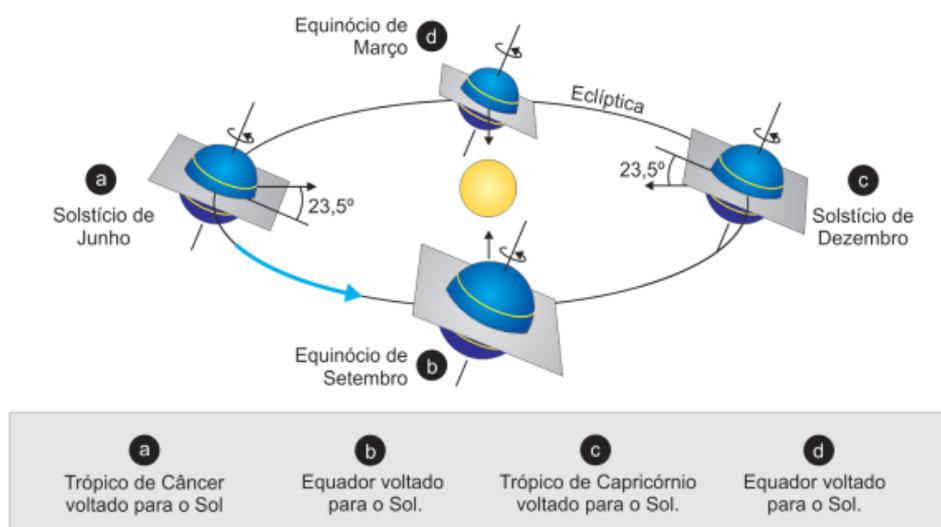
Fonte: Instituto de Física - UFRGS. A Esfera Celeste. Disponível em:
<http://astro.if.ufrgs.br/esf.htm>. Acesso em: 23 mai. 2025.

Além disso, um observador sempre estará localizado exatamente no centro da esfera celeste, de modo que visualizará o movimento dos astros do Leste para o Oeste. No entanto, isso se deve à relatividade do movimento, pois todo movimento observado é relativo ao movimento do observador, segundo Kepler e Saraiva (2014). Na verdade, a rotação da Terra acontece do Oeste para o Leste. Logo, o movimento de uma estrela acontece no sentido contrário do que enxergamos.

Conforme explicam Canalle e Matsuura (2007), há estrelas tão afastadas do sistema solar, que, hipoteticamente, não apresentam movimento próprio, assim, não é possível perceber qualquer mudança de direção quando examinadas. Mas, sendo relativamente próximo da Terra, o percurso do Sol na abóbada celeste é aparente.

A trajetória descrita pelo Sol na abóbada celeste é denominada *eclíptica*, e ela está apoiada num plano que forma ângulo (*obliquidade da eclíptica*) de $23,5^\circ$ com o plano do equador celeste. Conseqüentemente, essa inclinação tem influência direta com as estações do ano, cada uma de suas metades se encontra em um hemisfério, como mostrado na Figura 5.

Figura 5 – Obliquidade da eclíptica.



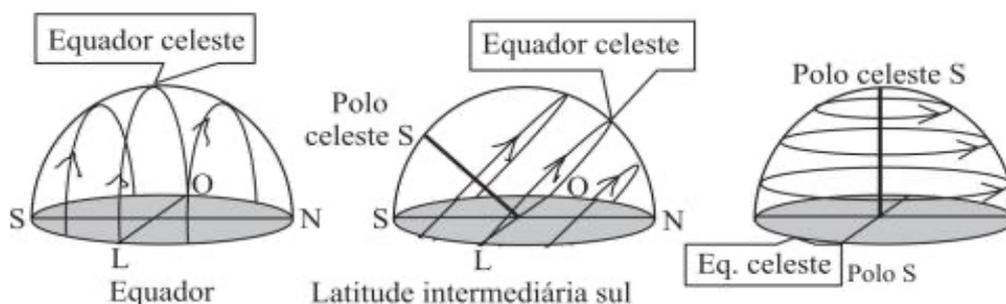
Fonte: Kepler e Saraiva (2014).

E, no momento em que o Sol atinge sua máxima declinação para algum dos hemisférios, temos os *solstícios* de verão e inverno. Na Figura 5, é possível observar a inclinação terrestre e propor uma hipótese que não podemos testar: se tivéssemos

obliquidade da eclíptica igual a 0° não haveria estações, apenas um clima contínuo? Não temos como testar essa suposição.

De modo geral, o movimento de um astro no céu irá descrever um arco sujeito à latitude do observador. Por exemplo, nos pólos, os corpos celestes são visíveis 24 horas por dia, já no equador, esse período de tempo se reduz para apenas 12 horas. Em latitudes intermediárias, por sua vez, pode ocorrer a observação tanto do nascer quanto do pôr de certos astros. A Figura 6 exhibe tal comportamento.

Figura 6 – Latitude dos arcos.



Fonte: Canalle e Matsuura (2007).

Mesmo sabendo dessas informações, a localização de um astro celeste ainda é vaga, logo surge a necessidade de trabalharmos com coordenadas astronômicas e parâmetros celestiais.

SISTEMAS DE COORDENADAS ASTRONÔMICAS

Ainda que o melhor modelo para simular o universo visível seja tridimensional, desconsideramos a distância entre observador e objeto, reduzindo a abordagem do espaço para um tratamento bidimensional com o intuito de facilitar o estudo.

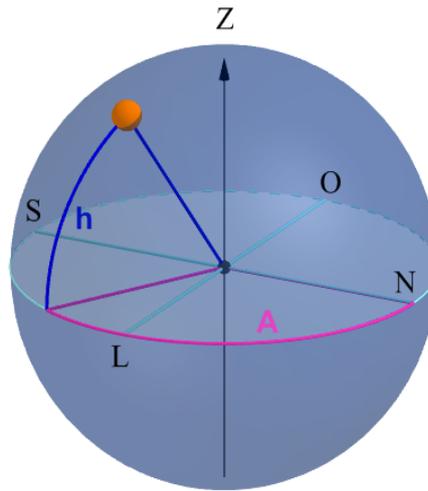
Conforme descrevem Canalle e Matsuura (2007), para encontrar a posição de um astro na abóbada celeste, com alguma exatidão, a princípio se deve escolher um sistema de coordenadas astronômicas que tenha um plano fundamental e um eixo perpendicular a ele.

Neste artigo tratamos de três sistemas de coordenadas astronômicas comuns na literatura: horizontal, equatorial celeste e equatorial horário.

Sistema horizontal

O sistema horizontal de coordenadas celestes possui um plano horizontal cujo observador é quem define os pontos cardeais. Sua localização é dada em função de dois ângulos elementares: *azimute* e *altura*. Segundo a Figura 7, tem-se:

Figura 7 – Coordenadas horizontais.



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

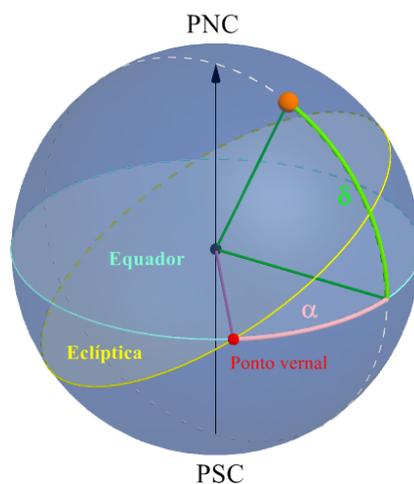
- Azimute (A): é o ângulo medido ao longo do horizonte, a partir do Norte/Sul, no sentido horário, até o meridiano do astro. Seus valores variam de 0° a 360° ($0^\circ \leq A \leq 360^\circ$).
- Altura (h): a altura é o ângulo medido a partir do horizonte até o astro. E seus valores variam de -90° a 90° ($-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$). Como consequência, temos o complementar da altura, a *distância zenital* (z).
- Zênite: é “o ponto da esfera celeste resultante do prolongamento ao infinito da direção vertical do observador no sentido contrário ao da gravidade.” para Abreu (2015, p. 3).

Este é um sistema local, pois depende das coordenadas do observador.

Sistema equatorial celeste

Nesse sistema de coordenadas astronômicas, temos que o plano fundamental é o equador celeste e a posição dos astros fica determinada a partir dos parâmetros *ascensão reta* e *declinação*. Conforme a Figura 8, tem-se:

Figura 8 – Coordenadas equatoriais celestes.



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

- Ponto vernal (γ): é um ponto do equador esférico celeste ocupado pelo Sol quando este passa do hemisfério sul celeste para o hemisfério norte celeste, em aproximadamente 22 de março.
- Ascensão reta (α): é o arco do equador celeste com origem no meridiano que passa pelo ponto Áries (ponto vernal γ) e tem fim no meridiano do astro. Seus valores variam de 0° a 360° . ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$).
- Declinação (δ): é o arco medido do meridiano celeste do astro, medido entre o equador e o próprio astro, tendo um valor positivo no hemisfério norte celeste e negativo no sul. Seus valores variam entre -90° e 90° ($-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$).
Define-se ainda o complementar da declinação, a *distância polar* (Δ).

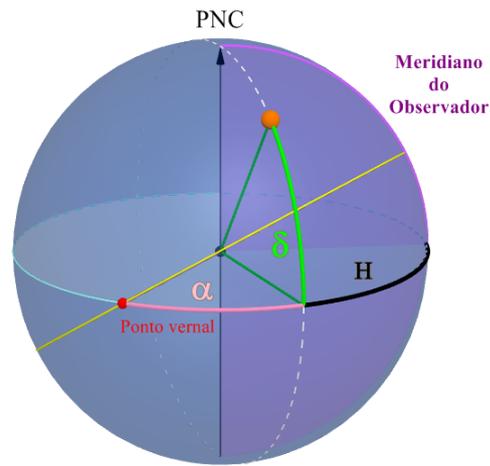
Esse é um sistema fixo porque não depende das coordenadas do observador. Assim, é como se estivéssemos observando a esfera celeste de um ponto externo a ela. Outra característica relevante do sistema equatorial celeste, conforme Canalle e

Matsuura (2007), é que a ascensão reta e a declinação de um objeto celeste sofrem mudanças desprezíveis em longos períodos.

Sistema equatorial horário

Já o sistema equatorial horário difere do equatorial celeste por um parâmetro, substituímos a *ascensão reta* pelo *ângulo horário*. Conforme Figura 9, tem-se:

Figura 9 – Coordenadas equatoriais horárias.



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

- Declinação (δ): é o arco medido do meridiano celeste do astro, medido entre o equador e o próprio astro, tendo um valor positivo no hemisfério norte celeste e negativo no sul. Seus valores variam entre -90° e 90° ($-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$).
- Ângulo horário (H): é o arco do equador compreendido entre o meridiano local do observador e o meridiano que passa pelo astro, medido no sentido horário. Seus valores variam de 0° a 360° ($0^\circ \leq H \leq 360^\circ$).

Esse é um sistema local, pois depende das coordenadas do observador.

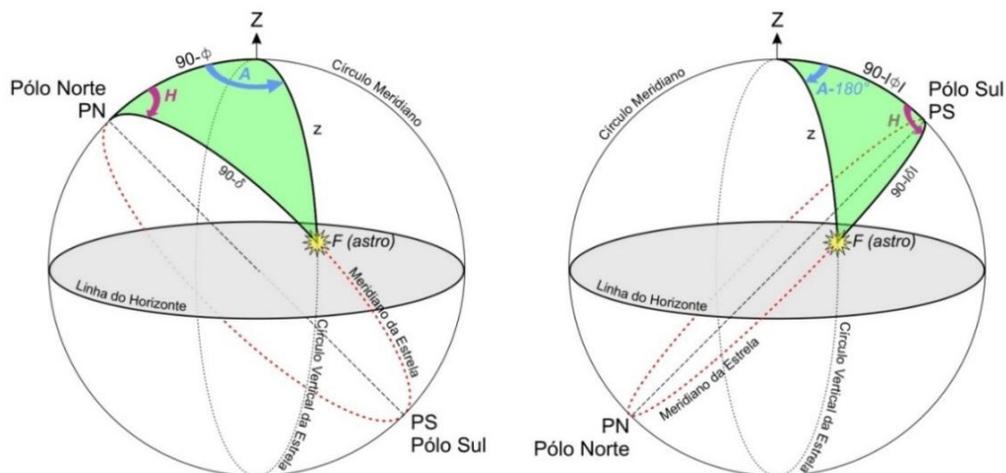
Dessa maneira, para localizar um corpo celeste na abóbada, basta adotar um sistema de coordenadas astronômicas e os parâmetros que determinam unicamente a posição do astro.

Agora colocamos a seguinte questão: é possível realizar conversões entre os sistemas de coordenadas? A resposta é afirmativa, mas, antes, é preciso introduzir o triângulo de posição.

Triângulo de posição

Chama-se *triângulo de posição* todo triângulo da esfera celeste formado pelo zênite, um dos pólos e um astro, como aquele exibido na Figura 10. Sua importância está, dentre outras, na possibilidade de determinar a posição geográfica de um lugar sabendo a localização de um astro ou de encontrar a posição do astro quando são conhecidas as coordenadas do lugar. Mais ainda, com o triângulo de posição, pode-se realizar a conversão entre os sistemas de coordenadas.

Figura 10 – Coordenadas eclípticas.



Fonte: Kepler e Saraiva (2014).

Seja, na Figura 10, o triângulo de posição para o hemisfério celeste norte, em que: δ é a declinação; ϕ é a latitude do observador; o ângulo com vértice no zênite é o azimute (A); o ângulo com o vértice no pólo é o ângulo horário (H); o arco formado entre o zênite e o astro é a distância zenital (z); o arco entre o zênite e o pólo é igual a $90 - \phi$; o arco entre um pólo e o astro é igual a $90 - \delta$; e x o ângulo formado pelo círculo máximo que passa pelo zênite e pelo meridiano do astro.

Suponha $\phi, \delta \neq \frac{\pi}{2}$ e $A, H, x, z \neq 0^\circ$, caso contrário é impossível construir o triângulo de posição.

Pelos teoremas da trigonometria esférica, deduzem-se as identidades:

$$H = \arccos(\cos(z)\sec(\phi)\sec(\delta) - \operatorname{tg}(\phi)\operatorname{tg}(\delta)) \quad (1)$$

$$A = \arccos(\operatorname{sen}(\delta)\operatorname{cosec}(\phi)\sec(z) - \operatorname{tg}(\phi)\operatorname{cotg}(z)) \quad (2)$$

$$h = \arccos(\cos(\delta)\operatorname{sen}(H)\operatorname{cosec}(A)) \quad (3)$$

$$x = \arcsen(\cos(\phi)\operatorname{sen}(A)\sec(\delta)) \quad (4)$$

$$\delta = \arcsen(\cos(z)\operatorname{sen}(\phi) + \cos(\phi)\operatorname{sen}(z)\cos(A)) \quad (5)$$

$$\phi = \arcsen(\cos(z)\operatorname{sen}(\delta) + \cos(\delta)\operatorname{sen}(z)\cos(x)) \quad (6)$$

Evidenciamos que as equações também são válidas para o hemisfério celeste sul. Basta aplicar as identidades trigonométricas esféricas.

Combinando as equações de (1) a (6), conseguimos realizar transformações entre os sistemas. Assim, dadas as coordenadas equatoriais de um objeto na esfera celeste, pode-se encontrar suas coordenadas horizontais e vice-versa.

Uma consequência imediata do triângulo de posição é o cálculo da separação angular, isto é, dados dois corpos celestes, conseguimos determinar o ângulo entre eles e deduzir se estão próximos na abóbada celeste em relação a um pólo.

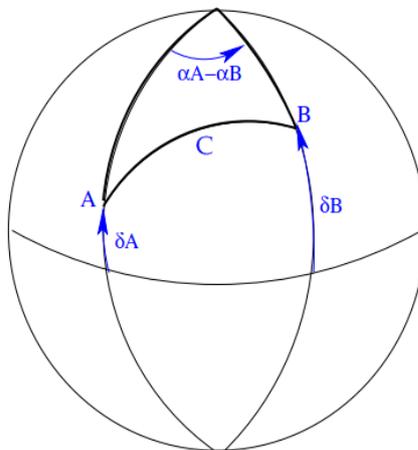
Separação angular entre duas estrelas

Conforme explicam Kepler e Saraiva (2014), determinar a separação angular entre duas estrelas consiste em calcular a distância ao longo de um círculo máximo ou a circunferência máxima que passa pelos corpos celestes.

Sejam A e B duas estrelas na esfera celeste que possuem, respectivamente, as coordenadas $\alpha_A, \delta_A, \alpha_B, \delta_B$, ou seja, ascensão reta e declinação. Tomando o pólo norte celeste como referência, construímos um triângulo esférico.

Pela Figura 11, temos um triângulo esférico que é formado pelas estrelas A, B e um dos pólos celestes.

Figura 11 – Separação angular entre as estrelas.



Fonte: Kepler e Saraiva (2014).

Aplicando o Teorema dos Cossenos, vem que:

$$\cos(C) = \cos(90^\circ - \delta B)\cos(90^\circ - \delta A) + \sin(90^\circ - \delta B)\sin(90^\circ - \delta A)\cos(\alpha A - \alpha B) \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \cos(C) = \sin(\delta B)\sin(\delta A) + \cos(\delta B)\cos(\delta A)\cos(\alpha A - \alpha B) \quad (8)$$

$$\therefore C = \arccos(\sin(\delta B)\sin(\delta A) + \cos(\delta B)\cos(\delta A)\cos(\alpha A - \alpha B)) \quad (9)$$

Desse modo, estamos aptos a calcular a separação angular entre dois astros da esfera celeste, inclusive a separação angular entre as estrelas da constelação de Órion, uma das mais luminosas do céu noturno.

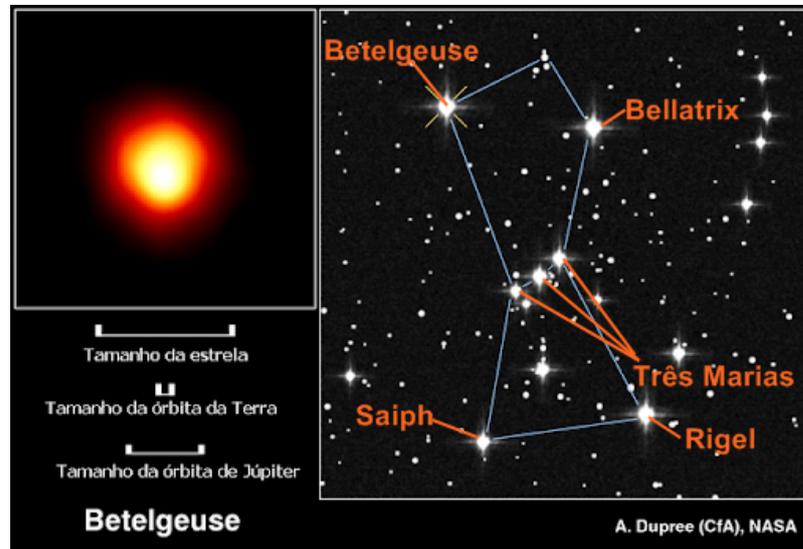
LOCALIZANDO CORPOS CELESTES PRÓXIMOS DO CINTURÃO DE ÓRION

Destaque no céu noturno, a constelação de Órion é um aglomerado brilhante de estrelas, conforme Kepler e Saraiva (2014) e Horvath (2013). No conjunto estelar se destacam as brilhantes Betelgeuse, Bellatrix, Rigel e Saiph. Para ilustrar, Kepler e Saraiva (2014) informam que Rigel é 62 mil vezes mais brilhante que o Sol.

Além disso, outra característica que torna a constelação única é o Cinturão de Órion, formado pelas estrelas Mintaka, Alnilan e Alnitak, conhecidas no Brasil como as “Três Marias”.

Para situar a constelação, a Figura 12 exhibe as estrelas do aglomerado.

Figura 12 – Constelação de Órion.



Fonte: Adaptado de Observatório da UFMG. Constelação de Órion. Disponível em:
<http://www.observatorio.ufmg.br/dicas-de-observacao/orion/orion.html>. Acesso em: 23 mai. 2025.

Escolhendo o sistema de coordenadas equatoriais celestes, vamos descrever, na Tabela 1, a posição de algumas dessas estrelas no dia 11 de julho de 2020.

Tabela 1 – Coordenadas astronômicas de algumas das estrelas da constelação de Órion.

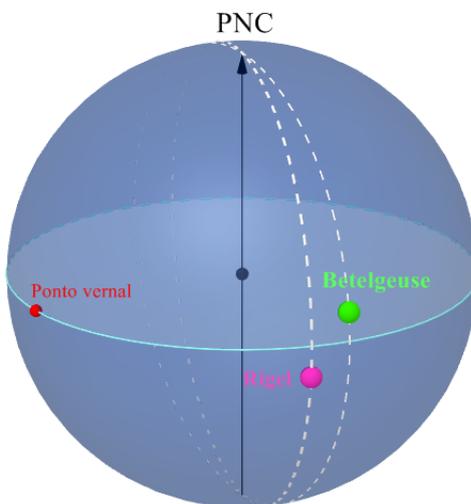
Estrela	Ascensão Reta	Declinação
Betelgeuse	88,79°	+7,40°
Rigel	78,63°	-8,20°
Mintaka	83,03°	-0,30°
Alnilan	84,05°	-1,21°
Alnitak	85,19°	-1,94°

Fonte: Elaborada pelos autores. Dados obtidos em 11 jul., 2020, de <https://theskylive.com/>

Na Tabela 1, exibimos a ascensão reta e a declinação das estrelas do Órion em 11 de julho de 2020, obtidas pelo aplicativo The Sky Live. Com isso, estamos em condição de representar as luminosas Betelgeuse e Rigel na esfera celeste.

Pela Figura 13, temos a posição das referidas estrelas em 11/07/2020.

. Figura 13 – Betelgueuse e Rigel na esfera celeste.



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

Além da localização das estrelas na esfera celeste, o triângulo de posição nos permite calcular a separação angular entre dois astros. Consultando os parâmetros ascensão reta e declinação na Tabela 1, Betelgueuse tem $\alpha_A = 88,79^\circ$, $\delta_A = 7,40^\circ$ e Rigel tem $\alpha_B = 78,63^\circ$, $\delta_B = -8,20^\circ$. Logo, pela equação da separação angular (9):

$$C = \arccos(\sin(7,40^\circ)\sin(-8,20^\circ) + \cos(7,40^\circ)\cos(-8,20^\circ)\cos(-10,16^\circ)) = 18,59^\circ \quad (10)$$

Ou seja, a separação angular dos corpos celestes é pequena.

Conforme explicam Canalle e Matsuura (2007), enquanto o movimento estelar pouco altera as coordenadas astronômicas do objeto, os planetas se movem de tal forma que suas coordenadas se alteram rapidamente. Logo, a representação gráfica de cada planeta na esfera celeste teria que ser atualizada, no mínimo, diariamente.

Sendo uma constelação de fácil identificação, o Órion é um bom candidato a referência no céu noturno. Por exemplo, se soubermos que um corpo celeste tem as coordenadas equatoriais com valores próximos do Órion, reduzimos notavelmente a região em que buscamos o astro. E isso também se estende aos planetas. Vejamos a posição dos planetas do sistema solar na esfera celeste.

Na Tabela 2, estão as coordenadas equatoriais dos planetas do sistema solar, ascensão reta e declinação, no dia 11 de julho de 2020.

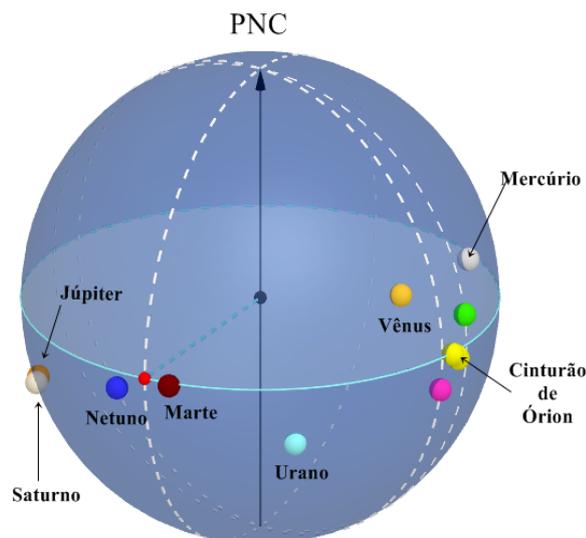
Tabela 2 – Coordenadas astronômicas dos planetas do sistema solar.

Planeta	Ascensão Reta	Declinação
Mercúrio	95,56°	+18,80°
Vênus	66,99°	+17,30°
Marte	6,57°	-00,76°
Júpiter	294,70°	-21,81°
Saturno	301,25°	-20,56°
Netuno	351,78°	-04,73°
Urano	37,56°	-14,33°

Fonte: Elaborada pelos autores. Dados obtidos em 11 jul., 2020, de <https://theskylive.com/>.

Observando os valores das coordenadas na Tabela 2, concluímos que no dia 11 de julho de 2020, Júpiter e Saturno se encontravam muito próximos, uma vez que as coordenadas de ambos diferem por valores pequenos. Uma visualização de cada planeta do sistema solar e do Órion, na esfera celeste, é dada na Figura 14.

Figura 14 – Localização dos planetas do sistema solar na esfera celeste.



Fonte: Elaborada pelos autores (2025).

Note-se também que as estrelas Mintaka, Alnilan e Alnitak possuem declinações próximas de 0° , encontrando-se perto do equador celeste. Note que, pela simulação, Vênus e Mercúrio se encontravam relativamente próximos do Órion. Portanto, no dia 11 de julho de 2020, nas condições ideais, teria sido propício investigar uma região próxima à constelação de Órion para encontrar Vênus ou Mercúrio.

Dispondo de efemérides, isto é, tabelas que mostram a posição dos astros no céu em determinado dia, mês e ano, e de um *software* de geometria dinâmica, como o *Geogebra 3D*, podemos simular os astros se movendo pela esfera celeste durante um ano terrestre.

Porém, conforme já explicado anteriormente, as estrelas possuem valores de ascensão reta e declinação que não variam muito com o passar do tempo, portanto, é mais interessante analisar o trajeto anual dos planetas na esfera celeste, uma vez que estes têm parâmetros que variam mais rapidamente com o tempo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas foi uma revolução tanto para a Matemática quanto para a Ciência. Indo além das aplicações vistas no artigo, segundo Russell (2005), as Geometrias Não Euclidianas tiveram influência direta na Relatividade Geral de Einstein. Contudo, apesar de suas relevantes aplicações, têm como obstáculo uma formulação matemática mais avançada.

Neste artigo, buscamos evitar o desenvolvimento matemático mais elaborado da Geometria Esférica e focamos em apresentar as definições e os teoremas, estes sem as devidas demonstrações. Logo, demos atenção aos ângulos e aos arcos.

A partir da Geometria Esférica, estudamos triângulos especiais que, aplicados com os teoremas, possibilitaram estabelecer sistemas de coordenadas astronômicas e assim criar uma interpretação visual para a posição dos astros.

Sendo uma constelação chamativa, o Órion se destaca na abóbada celeste e, por isso, é uma boa referência para a localização no céu noturno. Assim, a tarefa de localizar um planeta ou outro corpo celeste se torna mais simples desde que o astro

esteja próximo do aglomerado. Então, dispensamos a necessidade de instrumentos ópticos para visualizar alguns astros.

Nesse contexto, os aplicativos de geometria dinâmica são ótimas ferramentas de construção e visualização. Por exemplo, com o *Geogebra* conseguimos simular a trajetória dos astros no céu. De posse das efemérides de um objeto, somos capazes de reproduzir a posição dele na esfera celeste.

De modo a generalizar essa atividade, propomos a representação de todos os planetas do sistema solar. Logo, teríamos como prever as trajetórias dos planetas no céu ao longo de 365 dias. A partir disso, levantamos o questionamento: será que um desses planetas consegue passar por toda a esfera celeste em um ano terrestre?

Ainda indicamos o emprego de aplicativos como o *The Sky Live*, pois com ele temos não somente as informações astronômicas presentes dos astros, bem como dados do passado e do futuro. E, adicionalmente, temos informações relevantes tais como distâncias, temperatura, velocidade do corpo celeste, etc. Logo, há uma gama interessante de propriedades que podem ser estudadas com o aplicativo.

Com os tópicos e discussões deste artigo, identificamos que a interface entre a Astronomia e a Matemática é próspera no sentido em que bastantes conceitos da Astronomia decorrem de noções puramente geométricas. Logo, existe uma ponte de conhecimentos que vão se entrelaçando. Em nosso texto, destacamos a aparição de ângulos, arcos e funções trigonométricas.

Portanto, sublinhamos a fecunda relação existente entre a Geometria Esférica e a Astronomia de Posição, e a possibilidade de utilizar os conhecimentos de ambas para visualizar algum astro de interesse na abóbada celeste, considerando um ponto de referência, como a luminosa constelação de Órion e suas exuberantes estrelas: Betelgeuse, Rigel, Alnilam, Alnitak e Mintaka.

REFERÊNCIAS

ABREU, S. M. de. Geometria Esférica e Trigonometria Esférica aplicadas à Astronomia de Posição. Dissertação – Universidade Federal de São João Del-Rei, **São João Del-Rei**, 2015. Disponível em: <https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=91363>. Acesso em: 15 abril 2024.

BARBOSA, J. L. M. Geometria hiperbólica, IX Escola de Geometria Diferencial, **Vitória**, 1994.

BICUDO, I. Os elementos/Euclides; tradução e introdução de. **São Paulo**: Editora UNESP, 2009.

CANALLE, J. B. G.; MATSUURA, O. T. Astronomia. Formação continuada de professores. Curso Astronáutica e Ciências do Espaço. **Brasília**: Agência Espacial Brasileira, 2007.

GREGOR, I. C. S. .; MACÊDO, J. A. de; CRISOSTOMO, E. .; NUNES, D. M. The study of spherical geometry in Mathematics teacher education: an experience based on the use of manipulable materials. **Research, Society and Development**, [S. l.], v. 10, n. 1, p. e18510111646, 2021. DOI: 10.33448/rsd-v10i1.11646. Disponível em: <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/11646>. Acesso em: 30 mar. 2025.

HORVATH, J. E. Uma proposta para o ensino da astronomia e astrofísica estelares no Ensino Médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 35, n. 4, p. 4501, 2013.

KEPLER, S. O.; SARAIVA, M. de F. O. Astronomia e Astrofísica. Departamento de Astronomia – Instituto de Física. **Porto Alegre**: UFRGS, 2014.

RUSSELL, B. ABC da Relatividade. **Rio de Janeiro**: Jorge Zahar Editora, 2005.

SANTOS, M. A.; PANSONATO, C. C. A Geometria Esférica e o GeoGebra: abordagem trigonométrica para solucionar problemas de navegação no globo terrestre. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, [S. l.], v. 13, n. 3, p. 123–140, 2024. DOI: 10.23925/2237-9657.2024.v13i3p123-140. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/67599>. Acesso em: 23 abr. 2025.

TOLEDO, M. L. Uma abordagem sobre geometria não-euclidiana para o ensino fundamental. Dissertação (PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", **Bauru**, 2018.