

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL NA ENGENHARIA ELÉTRICA

Matheus Coelho de Oliveira

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão, SP, Brasil

Alexandre Maniçoba de Oliveira

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão, SP, Brasil

Anna Karina Fontes Gomes

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão, SP, Brasil

Elcio Rodrigues Aranha

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão, SP, Brasil

Resumo: As equações de Maxwell são um conjunto de equações diferenciais parciais que fundamentam a teoria do eletromagnetismo. Esse conjunto de quatro equações contribuiu significativamente para toda a revolução tecnológica, no ramo da engenharia, principalmente na engenharia elétrica, sendo baseadas nas Teorias de Gauss, Faraday e Ampère. Esse artigo tem como intuito a análise das quatro equações de Maxwell e suas aplicações no ramo da engenharia elétrica, ressaltando a importância das descobertas dessas equações e verificando resultados práticos de aplicações no cotidiano e no projeto de novos aparelhos e dispositivos que continuamente estão em desenvolvimento para suprir as necessidades do mercado.

Palavras-chave: Aplicações na Engenharia, Equações de Maxwell, Equações Diferenciais Parciais.

Abstract: Maxwell's equations are a set of partial differential equations that underlie the theory of electromagnetism. This set of four equations contributed significantly to the entire technological revolution in engineering, especially in electrical engineering, being based on theories of Gauss, Faraday and Ampere. The article intends to analyze the four equations of Maxwell and its applications in the engineering electrical field, emphasizing the importance of the discoveries of these four equations and verifying practical results of applications, in daily life, in design of new devices and devices that are continuously developing to meet market needs.

Keywords: Applications in Engineering, Maxwell's equations, Partial Differential Equations.

INTRODUÇÃO

- **Equações de Maxwell**

As equações de James Clerk Maxwell (1831-1879) formam um conjunto de quatro equações que descrevem o eletromagnetismo e são baseadas nas ideias de Michael Faraday (1791-1867), Ampère (1775-1836) e Gauss (1777-1855). Essas equações relacionam a conexão do campo elétrico \vec{E} com o campo magnético \vec{B} .

De acordo com HAYT (2013, p. 278)

A primeira equação postulada por Faraday descreve que uma corrente elétrica irá produzir um campo magnético, então o campo magnético poderá produzir uma corrente elétrica, sendo produzida pelo “magnetismo”. Essa lei pode ser demonstrada quando o campo magnético em movimento ou uma bobina introduz uma deflexão em um galvanômetro, relacionando os efeitos elétricos e magnéticos em uma única equação. Dizemos agora que um campo magnético variante no tempo produz uma força eletromotriz (fem).

A segunda equação de Maxwell é descrita por Ampère a qual determina a relação do fluxo elétrico total e a circulação de um campo magnético induzido \vec{B} , de forma que as correntes concatenadas ao longo de um comprimento fechado induzem um campo magnético \vec{B} em torno desse caminho, sendo proporcional à corrente total que passa por dentro desse contorno. A lei de Ampère permite o cálculo do campo magnético a partir de uma distribuição de corrente elétrica I ou densidade de corrente elétrica \vec{j} , sendo introduzido o conceito de corrente de deslocamento, criada pela variação do campo elétrico no tempo, corrente esta verificada em capacitores em altas frequências. A terceira e quarta equação de Maxwell são descritas por Gauss. A terceira equação enuncia que o vetor deslocamento \vec{D} de carga sobre uma superfície fechada é equivalente à carga interna a essa superfície, sendo a carga no interior dessa superfície proveniente de uma densidade volumétrica de carga total. A quarta equação descreve que o fluxo magnético (ϕ), sobre uma superfície fechada é nulo, observando que as linhas que entram na superfície fechada são iguais às que saem. Essa equação demonstra a não existência de monopólio magnético, não tendo cargas

individuais. As quatro equações de Maxwell na forma diferencial e integral estão representadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Equações de Maxwell na forma Diferencial e Integral

Equações de Maxwell	
Forma Diferencial	Forma Integral
1) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS$
2) $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS$
3) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$	$\iiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint \rho_v dV$
4) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\iiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

As equações de Maxwell apresentadas contribuiram significativamente para toda a revolução tecnológica, como na área da mecânica quântica e a relatividade restrita, podendo ainda ser expressas em aspectos microscópicos e macroscópicos. O artigo tomou como base a análise das aplicações das equações em problemas de engenharia elétrica, na criação de novos dispositivos, que auxiliem a evolução tecnológica, descritas por modelos que utilizam como base as equações de Maxwell.

2. APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

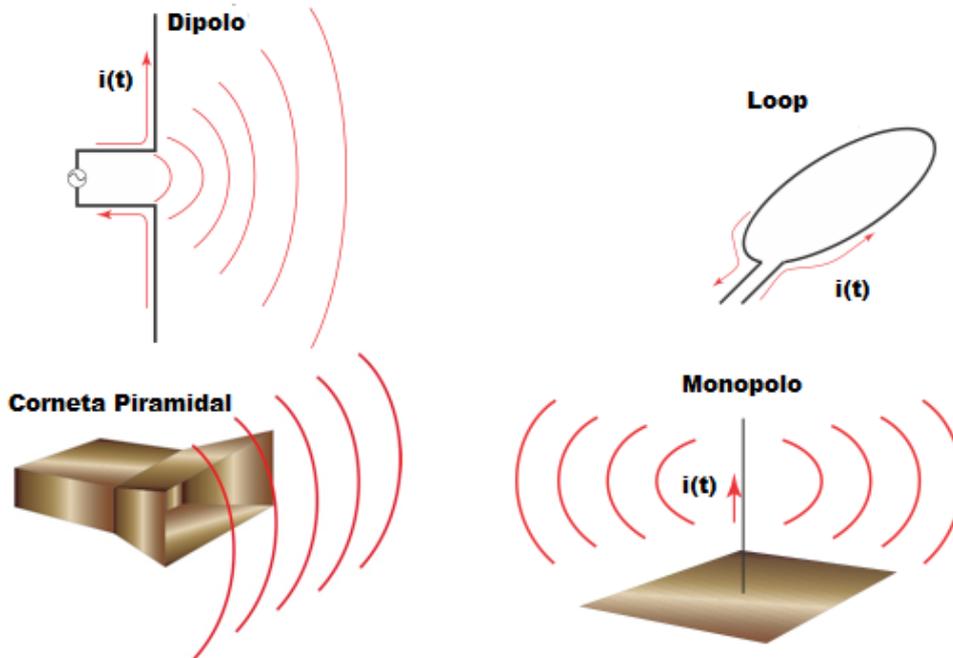
2.1 Equação não-homogênea e antenas

Antenas são geralmente as terminações em uma linha de transmissão, recebendo o sinal eletromagnético da fonte, transmitindo esse sinal no espaço com uma diretividade e eficiência que depende da sua configuração geométrica e da frequência (UFPE, 2017).

Para determinar o projeto de emissão e recepção de radiação eletromagnética é necessário o conhecimento das equações não-homogêneas. Para distribuições de

correntes não uniforme em uma antena, essas equações tornam-se extremamente úteis. Na Figura 1, são apresentados alguns tipos de configuração das antenas.

Figura 1- Configurações para diferentes tipos de antenas



Fonte: (UFPE, 2017)

As equações homogêneas não possuem cargas no lado direito da igualdade, ou seja, as equações (1) e (4) na forma diferencial.

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6)$$

As equações não-homogêneas possuem termos fontes no lado direito da igualdade, ou seja, as equações (2) e (3).

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (7)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (8)$$

Da equação, (4) tem-se a definição do potencial vetor magnético \vec{A} pela relação.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9)$$

Inserindo essa relação na equação (4).

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (10)$$

Essa relação introduz o potencial escalar definido como.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi \rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi \quad (11)$$

A partir das definições de \vec{A} e ϕ , os campos podem ser determinados.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (12) \qquad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (13)$$

As equações de Maxwell podem ser determinadas no vácuo, um meio onde não há relação linear entre os campos, admitindo a aproximação em que o meio de imersão e distribuição de cargas e corrente são lineares. A grandeza de campo é definida pela equação (14) e (15) (UFPE, 2017).

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (14)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \quad (15)$$

Nas quais os parâmetros da equação são definidos por, ϵ permissividade do meio, μ permeabilidade magnética e \vec{H} intensidade magnética. Utilizando a equação (14) na equação (7), com o emprego da equação (11), temos a equação (16).

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (16)$$

Utilizando a equação (12) e (15) na segunda equação de Maxwell para \vec{J} , com auxílio de (14), obtemos a equação (17).

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J} \quad (17)$$

Na qual c é a velocidade da luz definida por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (18)$$

Utilizando a identidade de cálculo vetorial rotacional do rotacional.

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (19)$$

E a partir da equação da velocidade da luz obtemos, a equação (20).

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left[(\nabla \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{J} \quad (20)$$

A partir disso, obtemos as equações do regime não-homogêneo, sendo descritas por equações diferenciais, demonstradas na equação (16) e (20).

2.2 A Condutividade Elétrica (σ)

Os materiais condutores são caracterizados por sua condutividade elétrica σ e os materiais isolantes são caracterizados por sua permissividade elétrica ϵ e por sua rigidez elétrica (OBERZINER, 2008). O conhecimento sobre a condutividade de um material é de extrema importância, pois está relacionado com o transporte de energia, por meio de corrente elétrica. Lembramos que a resistência elétrica é intrínseca com

a condutividade elétrica, sendo o inverso da resistividade, como pode ser verificado pela equação (21).

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (21)$$

A equação (21) pode ser relacionada com a resistência elétrica R , sendo dependente do comprimento do fio L e sua área de secção transversal A .

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{L}{A} \quad (22)$$

Na Figura 2, são apresentadas as constantes de condutividade elétrica de nove metais, os quais são utilizados em aplicações no ramo da engenharia elétrica e outros segmentos, para construção de novos materiais, estruturas, entre outros.

Figura 2 – Condutividade Elétrica a temperatura ambiente para nove metais (25°C)

Metal	Condutividade elétrica ($\Omega \cdot m$) ⁻¹
Prata	$6,8 \times 10^7$
Cobre	6×10^7
Ouro	$4,3 \times 10^7$
Alumínio	$3,8 \times 10^7$
Ferro	1×10^7
Latão (70 Cu - 30 Zn)	$1,6 \times 10^7$
Platina	$0,94 \times 10^7$
Aço comum ao carbono	$0,6 \times 10^7$
Aço inoxidável	$0,2 \times 10^7$

Fonte: (USP, 2012)

A densidade de corrente \vec{J} , pode ser determinada pela lei de Ohm, na forma local, representada pela condutividade σ e o campo elétrico \vec{E} , caracterizada pela equação (23).

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (23)$$

A densidade de corrente \vec{j} está relacionada, com a segunda equação de Maxwell e a área da secção transversal A ; caso uma corrente elétrica i atravesse um condutor de uma área maior para uma área de secção menor, a quantidade de corrente e carga deve ser constante, de forma que a área de secção transversal do fio seja inversamente proporcional à densidade de corrente elétrica, representada pela equação (24).

$$\vec{j} = \frac{i}{A} \quad (24)$$

2.3 A Lei de Faraday

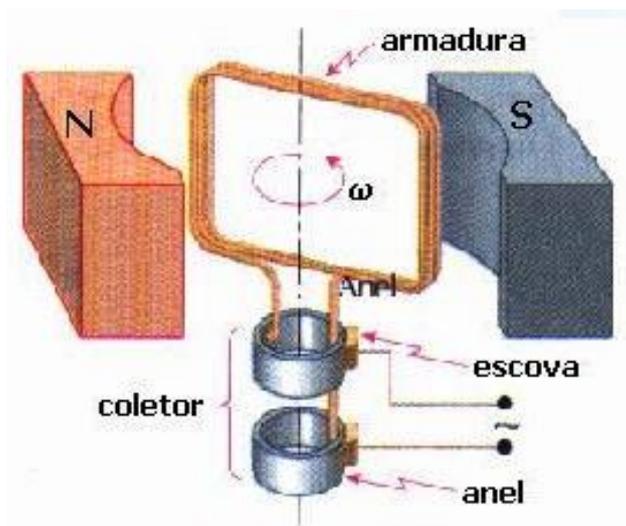
A lei de Michael Faraday (1791-1867), está relacionada com a primeira equação de Maxwell, que descreve as características do campo elétrico gerado por um fluxo magnético variável no tempo, onde uma variação do campo magnético no tempo induz um campo elétrico. Esse fenômeno é responsável pela indução eletromagnética principalmente pelos gerados elétricos. A lei de Faraday afirma que a força eletromotriz é dada pela variação do fluxo magnético no tempo, representado pela equação (25).

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} \quad (25)$$

O sinal negativo como mencionado anteriormente deriva da lei de Lenz, que indica que o sentido da força eletromotriz induzida é em oposição à variação do fluxo magnético. O processo de geração de energia deriva da lei de Faraday, onde a energia mecânica gera a variação do fluxo magnético, surgindo no gerador uma corrente induzida.

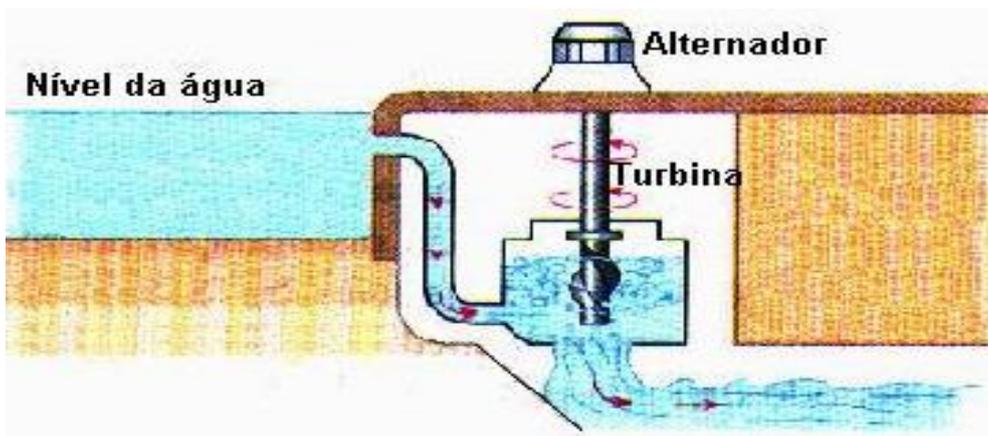
As Figuras 3 e 4 demonstram o processo de produção de energia por uma usina hidroelétrica, no qual é originada a energia mecânica da turbina com o movimento da rotação da armadura, podendo ser obtida pelo desnível da queda d'água através da energia potencial (CEPA USP, 1999).

Figura 3 – Gerador de corrente alternada (alternador)



Fonte: (CEPA USP, 1999)

Figura 4 - Exemplo de geração de energia por uma usina hidroelétrica



Fonte: (CEPA USP, 1999)

A espiral representada pela Figura 3 gira com uma velocidade angular constante ω em um campo magnético uniforme, gerando uma corrente alternada induzida, sendo o coletor a parte do conjunto formado por anéis e escovas, representado pelo gerador de corrente alternada Figura 3.

2.4 Propriedades dos Condutores e Condições de Fronteira

O problema consiste em um determinado condutor que possui uma quantidade de elétrons dentro do seu interior. Os campos elétricos criados por esses elétrons não são contrapostos por nenhuma carga positiva, de forma que os elétrons começam a acelerar, afastando-se uns dos outros. Esse processo é contínuo até que os elétrons atinjam a superfície do condutor. Nesse momento os elétrons se afastam uns dos outros não permitindo mais a sua progressão, pois, o material envolvido no condutor é isolante. Por isso, a densidade de carga no interior do condutor é igual a zero, possuindo apenas uma densidade superficial de carga em sua superfície exterior, caracterizando um bom condutor. Os condutores possuem o campo elétrico dentro do seu interior nulo. Devido à falta do campo elétrico, não há cargas no seu interior, levando a uma quantidade de cargas superficial denominada de densidade superficial de carga. Deseja-se relacionar os campos elétricos externos, sendo estes decompostos em duas componentes: uma tangencial e outra normal à superfície do condutor. Percebe-se que a componente tangencial é nula, pois, com condições estáticas sendo consideradas, a intensidade de campo elétrico e a densidade de fluxo elétrico tangenciais serão iguais a zero. A lei de Gauss responde às perguntas relativas à componente normal ao fluxo, não podendo penetrar no condutor, pois o campo em seu interior é nulo e assim deve deixar ortogonalmente a superfície do condutor. Pode-se dizer que a densidade de fluxo elétrico em coulombs por metro quadrado que deixa a superfície normalmente é igual à densidade superficial de carga em coulombs por metro quadrado, ou $D_n = \rho_s$.

Pode-se estabelecer uma fronteira entre um condutor e o espaço livre, demonstrando os componentes tangenciais e normais de \vec{D} e \vec{E} no lado do espaço livre da fronteira. Sendo ambos os campos nulos, a componente tangencial pode ser determinada pela Equação (26).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (26)$$

Em um caminho fechado $abcd$, a integral pode ser quebrada em quatro partes. O campo elétrico $\vec{E} = 0$ dentro do condutor, expressando o comprimento do condutor do percurso de a até b ou de c até d por Δw e de b para c ou de d para a por Δh , é obtido.

$$E_t \Delta w - E_{N,em b} \frac{1}{2} \Delta h + E_{N,em a} \frac{1}{2} \Delta h = 0 \quad (27)$$

Onde \vec{E}_n é a componente normal de \vec{E} e \vec{E}_t a componente tangencial. Conforme Δh se aproxima de zero, mantendo Δw pequeno, não faz diferença se os campos normais são ou não iguais em a e b , pois, Δh faz com que esses produtos se tornem desprezíveis e pequenos, logo o produto de $E_t \Delta w = 0$ e assim, $E_t = 0$.

Considerando D_n ao invés de E_n e escolhendo um pequeno cilindro como superfície gaussiana, com altura Δh e as áreas das faces do topo e da base por ΔS , tem-se, para Δh tendendo a zero, obtém-se a equação.

$$\oiint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (28)$$

Integrando sobre as três superfícies distintas, do topo, base e dos lados, respectivamente, obtemos o resultado da soma das três integrais igual a carga Q . Verifica-se que $D_n = \rho_s$, obtendo as equações de condição de fronteira do condutor no espaço-livre em eletrostática, pela equação (29) e (30).

$$\mathbf{D}_t = \mathbf{E}_t = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\mathbf{D}_N = \epsilon_0 \mathbf{E}_N = \rho_s \quad (30)$$

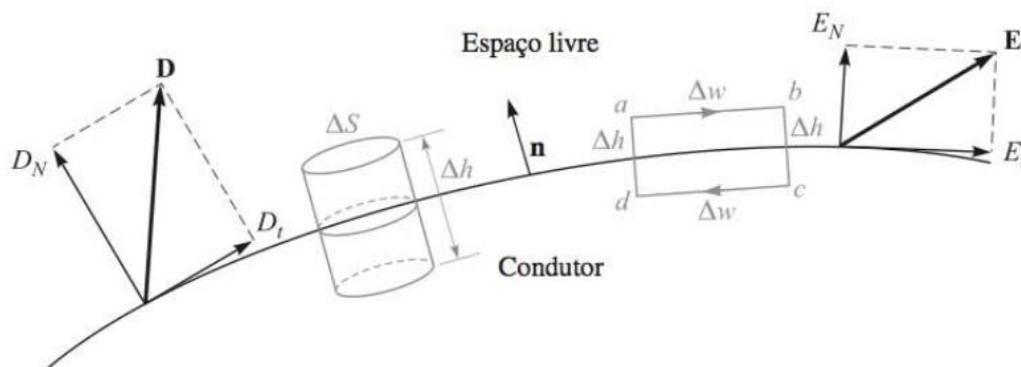
As equações (29) e (30) podem ser expressas por meio de campos vetoriais representados pela equação (31) e (32).

$$\vec{E} \times \mathbf{n} \Big|_s = 0 \quad (31)$$

$$\vec{D} \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (32)$$

Onde \mathbf{n} é o vetor unitário da superfície que aponta para fora do condutor, que pode ser visualizado pela Figura 4.

Figura 4 – Um caminho fechado e uma superfície gaussiana são utilizados para demonstrar as condições de fronteira entre a interface de um condutor e o espaço livre.



Fonte: (HAYT, 2013)

Em resumo:

- A intensidade de um campo elétrico dentro de um condutor é nula.
- A intensidade de um campo elétrico estático na superfície de um condutor possui, em todos os pontos, direção normal à superfície.
- A superfície de um condutor é uma superfície equipotencial.
- A Lei de Gauss foi utilizada para demonstrar as propriedades dos condutores, nas condições de fronteiras, sendo utilizada como base para a terceira e quarta equação de Maxwell.

Com isso, finaliza-se algumas das aplicações das Equações de Maxwell na engenharia elétrica, demonstrando ser uma ferramenta matemática fundamental para entendimento de mecanismos físicos, criação de novos materiais e a melhoria de componentes, além da resolução problemas reais apresentados no mundo da engenharia.

CONCLUSÃO

As equações de James Clark Maxwell (1831-1879) são fundamentadas nas bases teóricas de Faraday, Ampère e Gauss, as quais fundamentam o eletromagnetismo moderno, assim como as leis de Newton e a gravitação universal são bases para Mecânica. A partir do desenvolvimento matemático de Maxwell, foi possível a criação de novos aparelhos e descobertas científicas nas áreas da engenharia, com o estudo mais aprofundado sobre os condutores, melhoras em dispositivos como antenas no processo de produção de energia com a lei de Faraday, e no processo de transporte de energia elétrica com o estudo da condutância. As aplicações para essas equações estão sendo desenvolvidas até os dias atuais. O artigo demonstrou algumas dessas aplicações que são utilizadas na engenharia elétrica.

REFERÊNCIAS

- FONTANA (01 de JUNHO de 1999). *UFPE*. Acesso em 15 de Junho de 2019, disponível em **Eletromagnetismo**:www.cepa.if.usp.br/energia/energia1999/Grupo2B/Hidraulica/alternador.htm
- OBERZINER (07 de Julho de 2008). **As Equações de Maxwell e Aplicações**. p.15. Acesso em 25 de Julho de 2019.
- USP (1999). **Alternador e Dínamo**. Acesso em 23 de 06 de 2019, em Centro de Pesquisa Aplicada:www.cepa.if.usp.br/energia/energia1999/Grupo2B/Hidraulica/alternador.htm
- UFPE (01 de JUNHO de 2017). **Radiação e Antenas**. Acesso em 30 de Agosto de 2019, em:www3.ufpe.br/fontana/Eletromagnetismo2/EletromagnetismoWebParte02/mag2cap11.htm
- William H. Hayt Jr, John A. Buck. **Eletromagnetismo**. 7ª edição. McGraw-Hill, 2008, p.278, 119, 120 e 121.