

## **ESTUDO E MODELAGEM DE UM PÊNDULO SIMPLES ATRAVÉS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E ANÁLISE DE VÍDEO ASSISTIDA POR COMPUTADOR**

**João Pedro de Sá Moreira**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão,  
SP, Brasil

**Eduarda Neves da Silva**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão,  
SP, Brasil

**Lucas de Oliveira Dalbeto**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão,  
SP, Brasil

**Mariana de Moraes Ribeiro Lião**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão,  
SP, Brasil

**Amauri Dias Carvalho**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), Cubatão,  
SP, Brasil

**Resumo:** O estudo e modelagem de sistemas através de equações diferenciais é de extrema importância para a Engenharia e ciência no geral. Visando servir como base introdutória para esta área, neste trabalho o comportamento de um pêndulo simples foi estudado, equacionado e simulado com sucesso. Foram testadas diferentes abordagens para a mesma equação, desde o caso mais simples, onde foi empregada uma técnica de linearização para tornar a equação analiticamente resolvível no domínio do tempo, porém com a restrição de que são contemplados com precisão apenas ângulos pequenos. Com um protótipo foi possível estudar até qual ângulo esta equação linearizada ainda é precisa. Visando tornar a equação mais próxima do comportamento real do pêndulo, tornando-a eficaz também para ângulos maiores, o software Scilab foi utilizado para simular a equação, e com base nos resultados obtidos, uma comparação foi feita com os resultados provenientes de ensaios feitos com o protótipo. Na próxima etapa, buscou-se envolver a resistência do ar na equação

diferencial, para que o amortecimento observado no pêndulo real fosse simulado na equação e então, visando aproximar empiricamente o coeficiente de amortecimento que melhor ajustava a equação simulada foi utilizado o software de análise de dados por vídeo Tracker.

**Palavras-chave:** Scilab. Tracker. Amortecimento. Linearização. Sistema.

**Abstract:** The study and modeling of systems through differential equations is extremely important for Engineering and science in general. In order to serve as an introductory basis for this area, in this work the behavior of a simple pendulum was studied, mathematically modelled and simulated successfully. Different approaches were tested for the pendulum behavior model, from the simplest case, where a linearization technique was employed to make the equation analytically solvable in the time domain, but with the constraint of only accurately contemplating small angles. With the prototype it was possible to study to what angle this linearized equation is still precise. Aiming to make the equation closer to the actual behavior of the pendulum, making it effective also at larger angles, the Scilab software was used to simulate the equation, and based on the results obtained, a comparison was made with the results from tests done with the prototype. In the next step, it was sought to involve the air resistance in the differential equation, so that the damping observed in the real pendulum was simulated in the equation and then, in order to approach empirically the coefficient of drag that best fit the simulated equation was used an analysis software Video Data Tracker.

**Keywords:** *Scilab. Tracker. Damping. Linearization. System.*

## INTRODUÇÃO

Um pêndulo é um sistema em que uma massa é suspensa em um fio que, por sua vez, é acoplado a um ponto fixo de uma superfície, permitindo a movimentação livre da massa à mercê das leis da gravidade. Existem vários tipos de pêndulos estudados por físicos – como pêndulo de Foucault, cônico, físico, entre outros –

entretanto o tipo de pêndulo que será utilizado neste trabalho será o pêndulo simples, em que a massa pode ser capaz de realizar um movimento linear (ARNOLD, 2011).

Esse movimento leva em consideração, basicamente, o período ( $T$ ), que é o intervalo de tempo no qual o pêndulo leva para completar a trajetória, em que retorna ao ponto de onde o mesmo partiu no início, já que seu movimento é considerado periódico.

Algumas de suas aplicações são: em estudos do movimento oscilatório e da força peso, na determinação da aceleração da gravidade da Terra, além de permitir a possível observação da influência das fases da Lua na variação do campo gravitacional da Terra e nas marés terrestres (ALBARELLO, 2013).

Portanto, levando em consideração tudo isso, este trabalho visa o estudo e modelagem de um pêndulo simples, através de comparações e testes realizados com diferentes abordagens para um equacionamento diferencial do comportamento do pêndulo. Os objetivos almejados são:

- O estudo do modelo ideal de um pêndulo (no qual se considera um movimento sem perdas);
- Linearizar o modelo, resolver analiticamente para o domínio do tempo e verificar até qual situação o modelo linearizado ainda é preciso.
- Estudar a modelagem de um pêndulo real com a adição de um coeficiente de amortecimento para aproximar o modelo do comportamento real do pêndulo.

A linearização de um processo é muito importante, já que com ela torna-se possível encontrar a solução da equação através da Transformada de Laplace, por exemplo. A equação linearizada possibilita uma maior facilidade no processo de definição dos parâmetros envolvidos na equação (MARCUIZZO, 2014). Para realizar esse processo, pode-se fazer uma mudança ou aproximação de alguma parcela ou parte da equação que caracteriza a não linearidade, como será feito neste trabalho.

Em relação ao coeficiente de amortecimento, este diz respeito aos efeitos da resistência do ar sobre as peças do pêndulo, fazendo com que o mesmo pare seu movimento depois de um determinado tempo (ARNOLD, 2011). Isto faz com que seja possível representar uma melhor aproximação com o movimento do pêndulo simples em situações reais de aplicação.

Para o desenvolvimento do projeto foi construído um protótipo de um pêndulo simples, além da utilização de dois softwares: o Scilab (para simular numericamente os modelos estudados e obter respostas gráficas) e o Tracker (para fazer a análise gráfica em vídeo do movimento realizado pelo protótipo desenvolvido), esses dois softwares serão tratados melhor ao longo do desenvolvimento do artigo.

## MODELAGEM DE UM PÊNDULO SIMPLES IDEAL

Antes de começar a explicação da modelagem do pêndulo em si, é necessário o entendimento da Segunda Lei de Newton para sistemas rotativos, já que o movimento de um pêndulo simples é baseado em uma rotação em torno de um eixo, sendo possível aplicar o conceito de sistema rotativo explicado por Newton.

Segundo Oliveira (2016), a fórmula que modela matematicamente um sistema rotativo é:

$$\sum \tau = I\alpha \quad (1)$$

em que,

$\tau$ : Rotação ocasionada por uma força (torque)

$I$ : Resistência à rotação de um corpo (momento de inércia)

$\alpha$ : Aceleração angular

Sendo o torque:

$$\tau = Fd \quad (2)$$

em que,

$F$ : força

$d$ : deslocamento

E o momento de inércia:

$$I = mr^2 \quad (3)$$

em que,

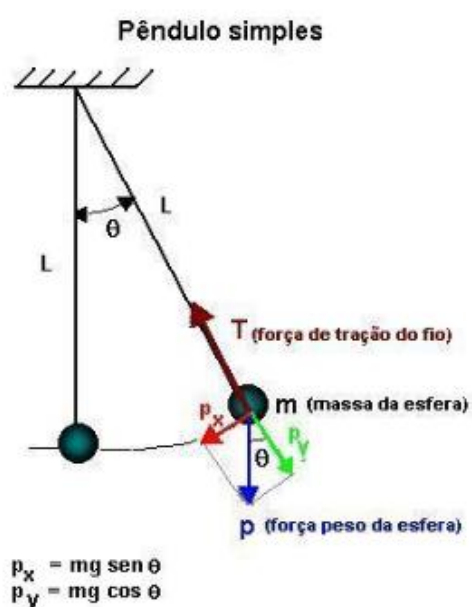
$m$ : massa

$r$ : distância ao eixo de rotação

Portanto, o torque resultante é igual ao momento de inércia do corpo em relação a um eixo, multiplicado pela sua aceleração angular (OLIVEIRA, 2016). Com o entendimento dessa equação, é possível começar a estudar a modelagem do comportamento do pêndulo.

A Figura 1 mostra um pêndulo simples ideal, isto é, possuindo as seguintes características: fio inextensível, inflexível e de massa nula, movimento estritamente bidimensional, ausência de forças resistivas, sem trepidações do suporte que sustenta o pêndulo.

Figura 1 – Pêndulo Simples.



Fonte: ALBARELLO (2013).

Tratando-se ainda da Figura 1, o fio de comprimento  $L$ , suporta em sua extremidade um corpo de massa  $m$ . A posição 0 indica o eixo de referência da haste, enquanto  $\theta$  indica o ângulo formado entre a posição atual da haste e o eixo principal, no qual  $\theta$  vale zero.

Dentre as forças atuantes no pêndulo, há a força de tração exercida na haste, denominada de  $\vec{F}_t$ . Há também a força Peso, identificada como  $\vec{P}$ , definida pelo produto da massa  $m$  pela aceleração da gravidade  $g$ . Ao traçar eixos de um plano cartesiano de modo que  $\vec{F}_t$  seja sobreposto ao eixo  $y$ , e conseqüentemente perpendicular ao eixo  $x$ , pode-se decompor a força  $\vec{P}$  nos eixos  $x$  e  $y$ , sendo:

$$\text{Em } x : \quad \overline{P_x} = mg \operatorname{sen} \theta \quad (4)$$

$$\text{Em } y : \quad \overline{P_y} = mg \operatorname{cos} \theta \quad (5)$$

É conhecido que em um sistema em equilíbrio, a soma das forças tem que ser igual a zero, portanto a força de Tração  $\overline{F_t}$  cancela-se com a força peso no eixo y, restando apenas a componente em x (ALBARELLO, 2013). Aplicando estas conclusões à segunda Lei de Newton para Sistemas rotativos nas Equações (2) e (3), respectivamente, juntamente com a equação da aceleração angular, será obtido:

$$\tau = -mg \operatorname{sen}(\theta)L \quad (6)$$

$$I = mL^2 \quad (7)$$

$$a = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (8)$$

Sendo  $\tau$  a rotação ocasionada por uma força torque, a qual é responsável pelo movimento periódico do pêndulo, e  $I$  a resistência à rotação de um corpo, ou seja, momento inércia. E a aceleração angular  $a$ , como a segunda derivada de  $\theta$  no tempo. Após definir-se tais variáveis e aplicá-las na Equação (1), obtém-se:

$$-mg \operatorname{sen}(\theta)L = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9)$$

Na qual, após manipulações algébricas, tem-se a equação diferencial de segunda ordem não linear que descreve o comportamento de um pêndulo simples em condições ideais (SMITH, 1998):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen}(\theta) \quad (10)$$

em que,

$g$  = aceleração da gravidade em m/s<sup>2</sup>;

$L$  = comprimento do fio do pendulo em m;

$\theta$  = ângulo que o pendulo forma com o zero referencial.

A partir daqui a Equação (10) será referenciada também como equação completa.

## LINEARIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

A Equação (10) se trata de uma equação diferencial de segunda ordem não linear por conta da parcela contendo o  $\sin(\theta)$ , e devido a isto, não é possível encontrar a sua solução analiticamente. Porém, existe uma linearização possível em que a equação se comporta adequadamente apenas para ângulos iniciais pequenos, o que possibilita sua resolução. Segundo Beer et al (2012), se a amplitude do deslocamento angular é pequena o suficiente para que a aproximação do ângulo  $\sin(\theta) \approx \theta$  seja verdadeira, então a equação do movimento se reduz à equação linear do movimento harmônico simples:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad (11)$$

Aplicando a transformada de Laplace e passando a equação para o domínio da frequência, obtém-se:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = s^2\theta(s) - s\theta(0) - \dot{\theta}(0) \quad (12)$$

$$\frac{g}{L}\theta = \frac{g}{L}\theta(s) \quad (13)$$

Sendo a condição inicial  $\dot{\theta}(0)$  nula (pêndulo parte do repouso), e  $\theta(0)$  uma constante a qual denominaremos de  $a$ , substituindo os valores obtidos na Equação (11) e igualando a zero, vem:

$$s^2\theta(s) - sa + \frac{g}{L}\theta(s) = 0 \quad (14)$$

$$\theta(s)(s^2 + \frac{g}{L}) = sa \quad (15)$$

$$\theta(s) = \frac{sa}{(s^2 + \frac{g}{L})} \quad (16)$$

Ao voltar para o domínio do tempo a Equação (12), tem-se a solução harmônica simples da Equação (11):

$$\theta(t) = a \cos \left( \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t \right) \quad (17)$$

Verifica-se que a posição angular será definida por uma função periódica cossenóide de amplitude definida pelo ângulo inicial e com período determinado pela raiz quadrada da razão entre a aceleração da gravidade e o comprimento do fio do pêndulo. Isso denota que o período será constante, e esse período constante só é preciso para ângulos pequenos em um dado pêndulo com fio de comprimento  $L$  e em um campo gravitacional que exerce uma aceleração  $g$  no peso do pêndulo.

Contudo, em diversas literaturas, como nos trabalhos de Costa et al (2012) ou nas pesquisas de Santos e Pereira (2015), esta aproximação linear só é válida para ângulos pequenos. Em casos de valores de  $\theta$  maiores, a aproximação do modelo torna-se inválida, visto que o erro entre a equação encontrada e a solução real torna-se aparente e aumenta à medida que o tempo avança. Portanto, no presente trabalho, a aproximação linearizada será comparada com os resultados obtidos através do protótipo desenvolvido do pêndulo simples, com diferentes ângulos iniciais para inferir a validade de aplicação desta aproximação para o protótipo.

Paralelo a estes resultados, buscou-se também o desenvolvimento de um modelo que descrevesse o comportamento não linear e real do pêndulo, para obter uma equação que mais se aproxime dos resultados de um pêndulo real.

## **MODELAGEM MATEMÁTICA DO COMPORTAMENTO DO PÊNDULO REAL CONSIDERANDO FORÇA DE AMORTECIMENTO DEVIDO À RESISTÊNCIA DO AR**

Ao considerar um comportamento mais próximo a um pêndulo real (voltando a equação completa), devemos considerar a resistência do ar e o atrito de rotação da haste que farão com que a oscilação do pêndulo cesse após determinado tempo, apresentando um comportamento semelhante a um sistema amortecido (ARNOLD et al, 2011).



O atrito de rotação da haste será considerado desprezível, porém a resistência do ar pode ser considerada. Para um pêndulo simples se movendo a baixas velocidades, a força de resistência do ar (amortecimento) no peso do pêndulo é definida como sendo proporcional a sua velocidade (MOHAZZABI & SHANKAR, 2017). A proporcionalidade é determinada por uma constante de amortecimento  $b$ , dependente da forma do peso do pêndulo.

$$F_{ar} = -b \frac{d\theta}{dt} \quad (18)$$

Ao introduzir este novo conceito na Equação (10), chega-se a equação final que forma uma melhor aproximação para o comportamento real de um pêndulo simples:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \text{sen}(\theta) - b \frac{d\theta}{dt} \quad (19)$$

em que,

$b$  = coeficiente de amortecimento em Ns/rad.

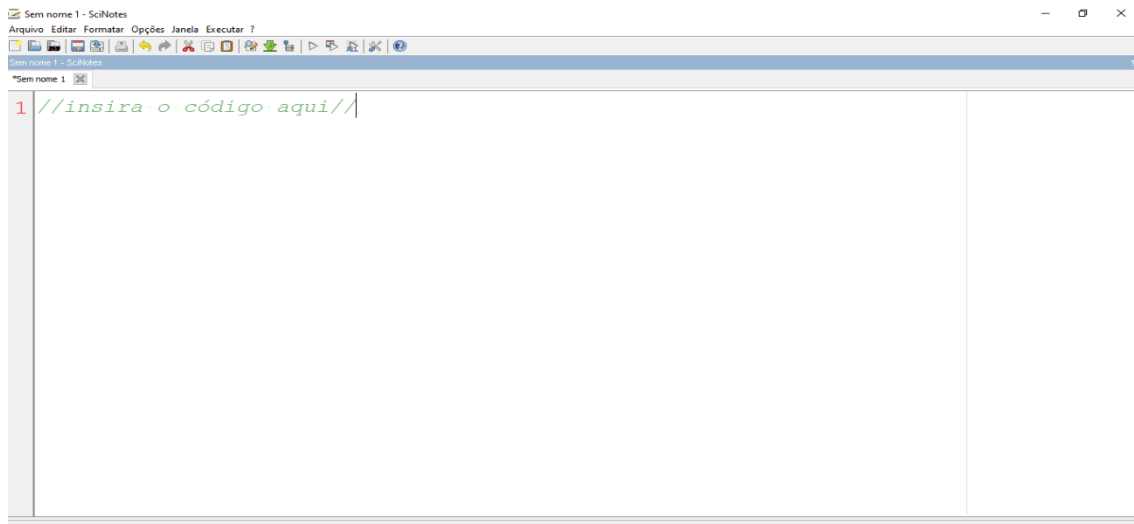
## USO DO SOFTWARE SCILAB PARA SIMULAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESTUDADA

O Scilab é um software gratuito e *open source* voltado para computação numérica. O software conta com uma linguagem de programação de alto nível que permite trabalhar com diversas funções diferentes que envolvem simulações, otimização, estatística, controle de sistemas, entre diversas outras (CAMPOS FILHO, 2010).

O software será utilizado para simular numericamente as equações diferenciais que modelam o comportamento do pêndulo. E com o mesmo código, e utilizando poucas alterações, pode-se simular a equação diferencial linearizada, a completa e a que considera o amortecimento causado pelo ar, portanto, esta sessão terá como objetivo descrever o código implementado no Scilab para simular as três abordagens para a equação diferencial que descreve o comportamento do pêndulo de modo a obter respostas gráficas.

No Scilab, o ambiente escolhido para implementar o código foi o SciNotes, que é um editor de textos embarcado que permite construir códigos e rodá-los com as mesmas funções encontradas no ambiente Console. Na Figura 2, é apresentada a interface do SciNotes.

Figura 2 – Interface do ambiente SciNotes para edição de texto.



Fonte: Scilab 6.0.2 (2019).

A seguir, o código será apresentado por blocos para tornar a explicação mais precisa. A Figura 3 apresenta as linhas iniciais utilizadas, que são todas basicamente voltadas para definições de parâmetros iniciais ou constantes que serão utilizadas na equação diferencial ou então no processo numérico de resolução da equação.

Figura 3 – Bloco de parâmetros iniciais.

```
1 y0 = [%pi/6 0]';  
2 t = 0:0.01:10;  
3 t0 = min(t);  
4 g = 9.80665;  
5 L = 0.32; .....  
6 b = 0.00945; .....
```

Fonte: Scilab 6.0.2 (2019).

Na Figura 2,  $\mathbf{y0}$  é um vetor de duas posições que armazena na posição 1 o valor inicial da função de posição angular do pêndulo  $\theta$  (em radianos), isto é, o ângulo com que o pêndulo inicia as oscilações ( $\theta(0)$ ), enquanto a posição 2 armazena o valor inicial da primeira derivada desta função, sendo então  $\dot{\theta}$ , interpretado como a velocidade com que o pêndulo se movimenta, portanto seu valor inicial em qualquer teste é dado como nulo pois o pêndulo sempre parte do repouso ( $\dot{\theta}(0) = 0$ ). Na segunda linha,  $\mathbf{t}$  é o intervalo numérico que será utilizado no processo de resolução da equação diferencial, sendo estruturado como “início:resolução:fim;”, enquanto  $\mathbf{t0}$  é o valor de tempo inicial, definido sempre como o mínimo valor encontrado no intervalo  $\mathbf{t}$  (fazendo uso da função `min()`). Os próximos três itens são valores constantes que serão utilizados na equação diferencial quando aplicável, sendo na ordem, a aceleração da gravidade  $\mathbf{g}$ , o comprimento do fio  $\mathbf{L}$  e o coeficiente de amortecimento  $\mathbf{b}$ .

O próximo bloco contempla o uso da função *function* que permite implementar uma equação diferencial de ordem superior utilizando um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. A Figura 4 mostra um exemplo de implementação para o caso da equação linearizada, já a Figura 5 mostra as outras formas da equação que foram utilizadas ao longo dos testes, sendo estas, a equação completa em (a) e a equação completa com a parcela da força de amortecimento em (b). Nota-se que para simular diferentes casos da equação do pêndulo, basta fazer alterações simples na linha de código.

Figura 4 – Uso da função *function* para implementar a equação diferencial do pêndulo como um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem

```
1 function dy = Pendulo(t,y)
2
3     dy(1) = y(2);
4     dy(2) = -(g/L)*y(1);
5
6 endfunction
14 y = ode(y0,t0,t,Pendulo)
```

Fonte: Scilab 6.0.2 (2019).

Figura 5 – Alteração no código da equação linearizada para torna-la completa (a) e depois para envolver o amortecimento devido ao ar (b).

```
1 function dy = Pendulo(t,y)
2
3     dy(1) = y(2);
4     dy(2) = -(g/L)*sin(y(1));
5     .....
6 endfunction
14 y = ode(y0,t0,t,Pendulo)
```

(a)

```
1 function dy = Pendulo(t,y)
2
3     dy(1) = y(2);
4     dy(2) = -(g/L)*sin(y(1)) - b*y(2);
5     .....
6 endfunction
14 y = ode(y0,t0,t,Pendulo)
```

(b)

Fonte: Scilab 6.0.2 (2019).

A função *function* do Scilab interpreta equações diferenciais no formato de sistemas. O número de equações diferenciais de primeira ordem deste sistema será igual à ordem da equação diferencial original. Para exemplificar matematicamente como realizar esta conversão, será tomado como exemplo a equação diferencial linearizada para o pêndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (20)$$

Para utilizar a notação de sistema, uma variável auxiliar deverá ser levada em consideração. Essa variável será chamada de  $\alpha$ . Esta nova variável auxiliar deverá ser igualada à primeira derivada da função original, e como consequência, a primeira derivada de  $\alpha$  será a segunda derivada da função original  $\theta$ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \alpha \quad (21)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{g}{L}\theta \quad (22)$$

As Equações (21) e (22) representam a Equação (20). Esta mesma ideia foi utilizada no código. Nas Figuras 4 e 5, percebe-se que  $\mathbf{y}(1)$  faz o papel de  $\theta$ , enquanto  $\mathbf{y}(2)$  o de  $\alpha$ , conseqüentemente  $\mathbf{dy}(1)$  é a primeira derivada de  $\mathbf{y}(1)$ , enquanto  $\mathbf{dy}(2)$  é a primeira derivada de  $\mathbf{y}(2)$  (que análogo ao que foi visto nas Equações (21) e (22), é a segunda derivada de  $\mathbf{y}(1)$ ).

Ainda nas Figuras 3 e 4, na linha 14 de cada figura está sendo utilizado o comando `ode()`, que se trata de um solucionador de equações diferenciais. Todos os argumentos implementados com o `ode()` já foram descritos anteriormente. Vale ressaltar que este é o comando que irá invocar o solucionador numérico.

O terceiro e último bloco do código trata sobre a configuração dos parâmetros para plotar o gráfico da solução da equação diferencial. A Figura 6 apresenta estes parâmetros:

Figura 6 – Configuração dos parâmetros para plotar o gráfico com a solução

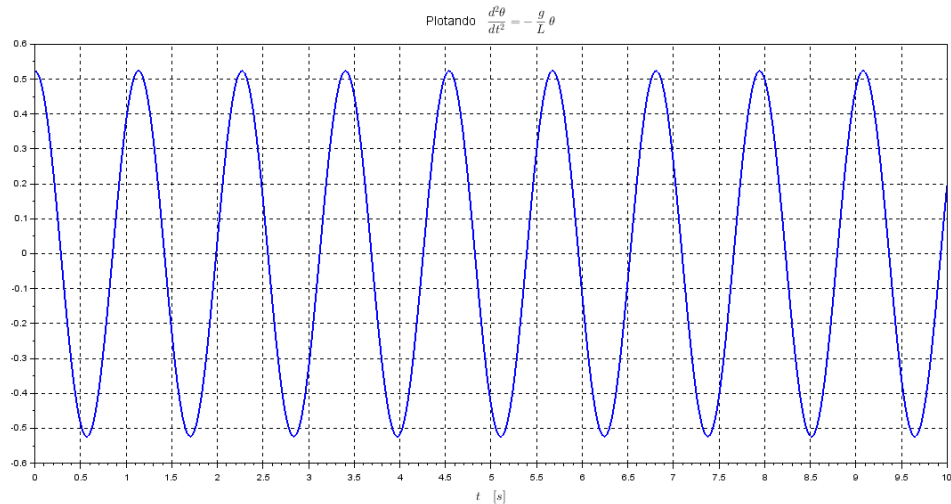
```
16 plot(t, y(1, :), 'LineWidth', 2)
17 xgrid();
18 xlabel('$t \quad [s]$', 'FontSize', 3)
19 ylabel('$f(t, \theta)$', 'FontSize', 3)
20 title(['Plotando' ' $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$'], 'FontSize', 3)
```

Fonte: Scilab 6.0.2 (2019).

A função `plot()` se encarrega de receber as configurações principais do gráficos, sendo elas as informações sobre os eixos. Para quadricular o fundo do gráfico utiliza-se a função `xgrid()`, enquanto para alterar legendas de eixos e títulos são utilizadas as três funções finais.

Como exemplo de uso do código apresentado, para os blocos vistos nas Figuras 3 - 6, a solução obtida é apresentada na Figura 7.

Figura 7 – Gráfico plotado para a equação linearizada

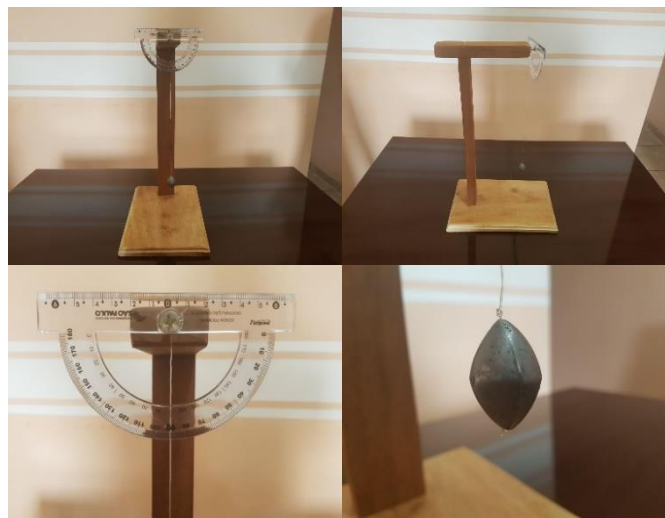


Fonte: Scilab 6.0.2 (2019).

## MODELO FÍSICO

Para conseguir analisar o quão representativo estão os modelos matemáticos estudados com a realidade, torna-se necessário o uso de um protótipo para fazer estes testes. Então foi produzido este modelo físico com estrutura de madeira, fio de nylon, um peso de chumbo de 72g e um transferidor para medição do ângulo de lançamento (Figura 8).

Figura 8 – Modelo físico



Fonte: Autores (2019)

## ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta sessão serão discutidos os ensaios realizados para comparar os resultados obtidos pelas simulações com o protótipo do pêndulo real.

### ENSAIO 1: PERÍODO COM EQUAÇÃO SIMPLIFICADA

A fim de demonstrar a viabilidade da equação linearizada para ângulos pequenos, foi feito um primeiro ensaio que consiste em comparar os tempos de períodos encontrados com o protótipo com os tempos provenientes das simulações da equação linearizada e também da equação completa. O teste real com o protótipo foi feito de maneira manual com a utilização de cronômetro, como desta forma não era possível obter um resultado preciso, foi cronometrado 3 vezes o primeiro período de cada ângulo e o resultado considerado foi a média destes 3 valores. Já as simulações foram realizadas através do *Scilab* modificando o ângulo inicial de acordo com o teste. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos no primeiro ensaio.

Tabela 1 – Resultados obtidos com o primeiro ensaio.

Ângulo (Grau)	Período (s)		
	Real	Ideal (Eq. Completa)	Ideal (Eq. Linearizada)
5°	1,093	1,135	1,135
10°	1,113	1,137	1,135
15°	1,100	1,140	1,135
30°	1,147	1,155	1,135

Fonte: Autores (2019)

Observando a Tabela 1, pode-se notar que o período encontrado com a equação simplificada se mantém o mesmo, e isto relaciona-se com o fato de que nesta equação linearizada, o período é determinado por uma constante, conforme explicado no fim da sessão sobre o modelo linearizado. Por conta disso, essa simplificação só é válida para ângulos pequenos pois, como pode-se observar, até o ângulo 15° um período de 1,135s é uma aproximação adequada e quanto maior o ângulo, maior a diferença, e ela se torna imprecisa.

Em relação aos valores obtidos com os testes reais, há uma certa imprecisão por conta de serem períodos consideravelmente curtos sendo calculados

manualmente. A mesma imprecisão volta a ocorrer com ângulos maiores por conta da ação da resistência do ar.

## ENSAIO 2: PERÍODO COM EQUAÇÃO COMPLETA

Com o propósito de analisar a precisão do modelo com a equação completa de um pêndulo real, foi realizado um segundo ensaio que consiste em comparar os tempos de período obtidos manualmente com o protótipo real (agora também com ângulos maiores) com os tempos obtidos através da simulação no Scilab. O teste com o protótipo real foi feito como no primeiro ensaio, tendo 3 medições do primeiro período e como resultado final, a média delas. A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos no segundo ensaio. Pode-se verificar que os períodos calculados através da equação completa se aproximam daqueles obtidos na realidade.

Tabela 2 - Resultados obtidos com o segundo ensaio.

Ângulo Grau	Período (s)		Erro
	Real	Ideal	
15°	1,100	1,140	0,043
30°	1,147	1,150	0,003
45°	1,183	1,180	0,003
60°	1,230	1,220	0,010
75°	1,260	1,270	0,010
90°	1,413	1,340	0,073

Fonte: Autores (2019)

Analisando a Tabela 2 pode-se conferir a relação de erro citada anteriormente encontrada nos ângulos muito pequenos e nos maiores. Se focar a análise nos ângulos centrais, excluindo os extremos, é possível notar o quanto a Equação completa (10) é uma boa aproximação para o sistema real proposto, tendo erros de 0,003s à 0,01s apenas.

Lembrando que essa aproximação é válida pois está sendo analisado o primeiro período de cada movimento, ou seja, ainda sem grande influência da resistência do ar, por isso, se faz necessária a modelagem do sistema amortecido.



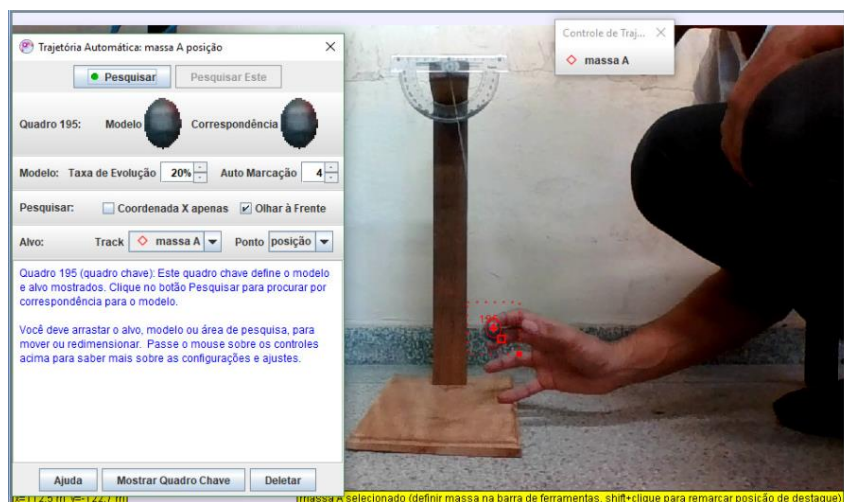
## DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DO COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO

Conforme explicado na sessão sobre a força de amortecimento, partindo da equação completa, pode-se torná-la mais fiel ao comportamento real do pêndulo ao introduzir uma parcela relacionada com o amortecimento causado pela resistência do ar, que atenua a amplitude das oscilações do pêndulo até eventualmente pará-lo. Essa parcela é na verdade a força de amortecimento que é proporcional à velocidade de oscilação do pêndulo e sempre contrária à sua direção de oscilação.

A forma escolhida para determinação do coeficiente de amortecimento foi por meio de um experimento utilizando o Tracker, um software livre de análise de vídeo e modelagem filiado ao projeto *Open Source Physics* (OSP, 2019). Mais detalhadamente, ele permite realizar análise de vídeos quadro a quadro de diversos tipos de movimento a partir de filmes feitos com câmeras comuns ou *webcam* (SIRISATHITKUL, *et al*, 2013).

Foi feita uma filmagem do pêndulo oscilando a partir de uma amplitude inicial definida. O primeiro passo foi fazer o *upload* do vídeo no software, e em seguida definir o ponto de massa no qual o Tracker irá acompanhar e gerar o gráfico de sua movimentação (Figura 9). No nosso sistema, o ponto de massa foi definido como o peso do pêndulo.

Figura 9 – Definição do ponto de massa no Tracker.



Fonte: Autores (2019)

A próxima etapa foi iniciar o processo de modelagem gráfica da movimentação e examinar se o software manteve o ponto de massa, definido inicialmente, por toda

a análise. O ângulo inicial do pêndulo foi definido como  $12^\circ$  (0,20944 radianos). Feito isso, o gráfico da movimentação do ponto de massa começa a ser gerado automaticamente de acordo com o avanço do vídeo (Figura 10).

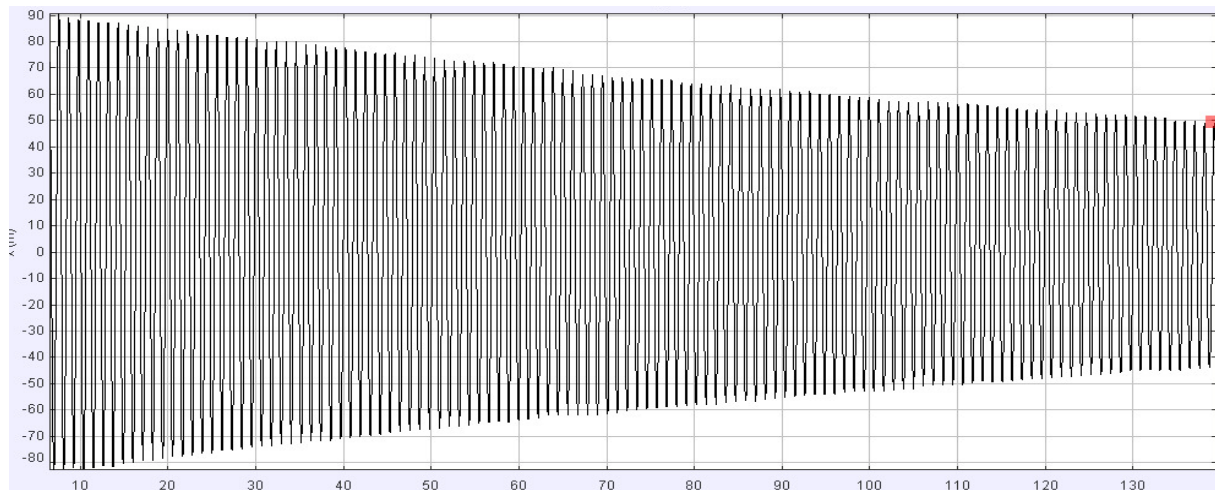
Figura 10 – Geração do gráfico.



Fonte: Autores (2019)

A parte útil do vídeo que foi utilizada para o teste contou com 133.056 segundos de gravação com o gráfico sendo gerado. Não há a necessidade de plotar o gráfico completo do pêndulo real pois além de levar um tempo grande, teria o mesmo efeito na determinação do coeficiente quando comparado a apenas um trecho. O gráfico resultante formado pelo software pode ser analisado na Figura 11.

Figura 11 – Gráfico gerado pelo Tracker para 133.056 segundos de oscilação do pêndulo.

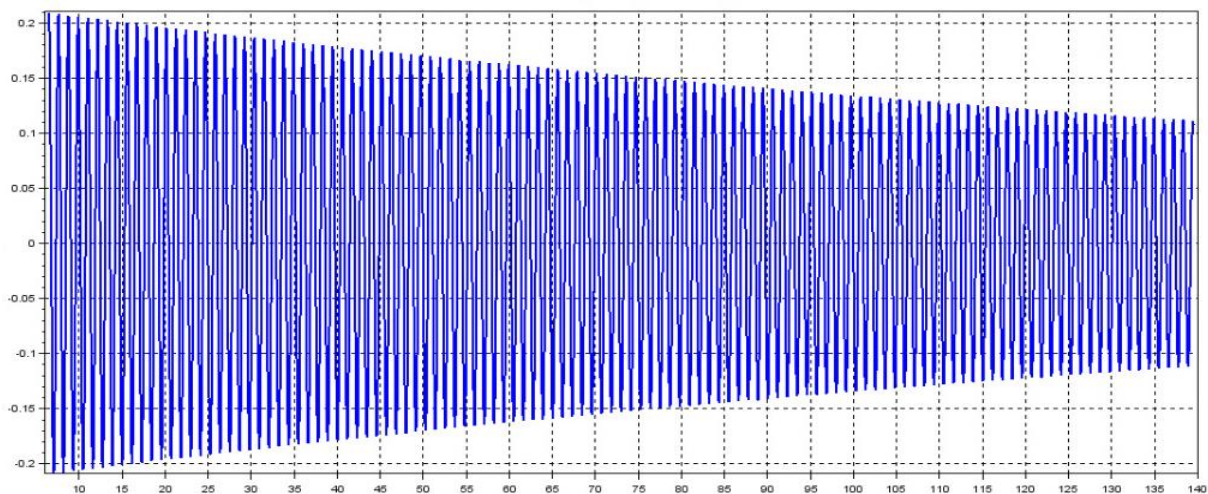


Fonte: Tracker 5.0.7 (2019).

O eixo das abcissas é dado em segundos enquanto o das ordenadas é dado em uma unidade de deslocamento em metros determinada por uma referência no Tracker, que eventualmente pode ser comparada com a variação angular do pêndulo em relação ao zero (pêndulo parado no centro).

O próximo passo é simular a equação completa com o Scilab conforme visto na Figura 5, item b), alterar o valor do coeficiente de amortecimento **b** e a partir da resposta gráfica utilizar métricas para determinar o quão próxima essa resposta é da resposta real gerada pelo Tracker. Os testes realizados levaram à escolha de um coeficiente  $\mathbf{b} = 9.45 \times 10^{-3} \frac{Ns}{rad}$ . A Figura 12 apresenta o gráfico gerado pela simulação do Scilab com o coeficiente de amortecimento determinado experimentalmente e com a mesma escala de tempo utilizada no teste do Tracker.

Figura 12 – Gráfico gerado pelo Scilab para a equação completa junto ao coeficiente de amortecimento determinado experimentalmente.



Fonte: Scilab 6.0.2 (2019).

As métricas utilizadas para comparar as duas curvas foram:

- Quantidade de picos positivos obtidos durante o teste e a simulação;
- Porcentagem da amplitude do último pico em relação ao primeiro.

Para a quantidade de picos positivos basta quantificar quantos picos acima do zero referencial existem na curva gerada pelo Scilab e a do Tracker. Espera-se que estes valores sejam próximos pois isso indica que o período da oscilação calculado pela simulação se aproxima do real. Já no caso da porcentagem de amortecimento,

basta verificar para ambas as curvas a porcentagem com que a amplitude do último pico representa em relação a do primeiro pico, e ao comparar estas porcentagens, se os valores forem próximos, isso é um indicativo de que as amplitudes estão coerentes.

Na Tabela 3, os resultados dessas duas métricas são apresentados.

Tabela 3 – Comparação das duas primeiras métricas adotadas para verificar a coerência entre as curvas obtidas.

Métrica	Scilab	Tracker
Quantidade de picos	118	118
Percentual de amortecimento em relação ao primeiro pico	52.15%	53.30%

Fonte: Autores (2019)

Com base no que foi apresentado na Tabela 3, a equação completa com o coeficiente de amortecimento determinado experimentalmente é uma boa aproximação para o comportamento do protótipo do pêndulo desenvolvido. E enfim, a equação diferencial resultante é:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{9,8066}{0,32}\right)\text{sen}(\theta) - (9,45 * 10^{-3})\frac{d\theta}{dt} \quad (23)$$

## CONCLUSÃO

Através da linearização da equação do modelo ideal do pêndulo simples, simplificaram-se os meios para encontrar a solução desta equação diferencial, sendo resolvida manualmente através das transformadas de Laplace. Juntamente com os ensaios realizados com o protótipo, pode-se concluir que a linearização melhor atende casos cujos ângulos são até 15°, levando em consideração apenas os primeiros períodos do movimento do pêndulo real.

Para melhor descrição do comportamento do pêndulo real, foi desenvolvido um modelo matemático que leva em conta o amortecimento com o tempo. Posto isto, através dos resultados descritos pelo software Tracker comparados ao modelo amortecido plotado pelo Scilab, pode-se inferir a precisão da modelagem feita para a aproximação da descrição do comportamento do pêndulo real para qualquer ângulo inicial, atingindo-se assim o principal objetivo.

## REFERÊNCIAS

ALBARELLO, J, R, et al. **OSCILAÇÃO E VELOCIDADE DO PÊNDULO SIMPLES NA MODELAGEM MATEMÁTICA**. Vivências. Vol. 9, N.17: p. 83-94, Outubro/2013.

ARNOLD, F, J, et al. **Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino**. Revista Brasileira de Ensino de Física. Sociedade Brasileira de Física, v. 33, n. 4, p. 4311-4311, 2011.

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.; CORNWELL P.J. **Mecânica Vetorial Para Engenheiros: Dinâmica** (AMGH, Porto Alegre, 2012), v. 2.

COSTA, A. P. , LIRA, V. V., SILVA, S. A. **Simulação de Pêndulo Simples e Invertido. VII CONNEPI, 2012.** Disponível em:<  
<http://prop.ipto.edu.br/ocs/index.php/connepi/vii/paper/viewFile/3877/2554>> Acesso em: 25, jun. 2019.

CAMPOS FILHO, F,F. **FUNDAMENTOS DE SCILAB**. Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Ciência da Computação do ICEX. 2010.

MARCUZZO, F, F, N. **MODELAGEM HIDROLÓGICA UTILIZANDO REGRESSÃO: CONCEITUAÇÃO MATEMÁTICA, LOGARITMIZAÇÃO E AVALIAÇÃO**. Disponível em: <  
<http://rigeo.cprm.gov.br/jspui/bitstream/doc/17447/4/poster.pdf>>. Acesso em: 26, jun. 2019.

MOHAZABBI, P.; SHANKAR, S.P. **Damping of a Simple Pendulum Due to Drag on Its String**. Jour-nal of Applied Mathematics and Physics, 5, 122-130. 2017.

OLIVEIRA, C. **Dinâmica do movimento rotacional**. Disponível em: <  
[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2224054/mod\\_resource/content/1/Dinamica\\_rotacao\\_corpos\\_2x1.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/2224054/mod_resource/content/1/Dinamica_rotacao_corpos_2x1.pdf)>. Acessado em: 26, jun. 2019.

Open Source Physics (OSP). **Open Source Physics**, 2003. Homepage. Disponível em: <  
<https://www.compadre.org/osp/>>. Acesso em: 25, jun. 2019.

RUSSELL, D. A.. **The Simple Pendulum**. The Pennsylvania State University, 2011. Homepage. Disponível em: <  
<https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pendulum/Pendula.html> > Acesso em: 22, jun. 2019

SANTOS, T. M., PEREIRA, R. F. **MODELO PARA UM PÊNDULO SIMPLES: ANÁLISE QUALITATIVA E LINEARIZAÇÃO.** Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, 2015. Disponível em: <  
[https://www.academia.edu/17656866/MODELO\\_PARA\\_UM\\_P%C3%8ANDULO\\_SIMPLES\\_AN%C3%81LISE\\_QUALITATIVA\\_E\\_LINEARIZA%C3%87%C3%83O](https://www.academia.edu/17656866/MODELO_PARA_UM_P%C3%8ANDULO_SIMPLES_AN%C3%81LISE_QUALITATIVA_E_LINEARIZA%C3%87%C3%83O)> Acesso em: 25, jun. 2019

SMITH, D, MOORE, L. **O pêndulo.** Disponível em: <  
<https://services.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/pendulum/index.html>>. Acesso em: 25, jun. 2019.

SIRISATHITKUL, C, *et al.* **Digital video analysis of falling objects in air and liquid using Tracker.** Rev. Bras. Ensino Fís. vol.35 no.1. São Paulo. 2013